

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages.



Exercice 1 Série C uniquement (5 points)

Soit p un entier relatif. On pose $a = 14p + 3$ et $b = 5p + 1$. Soit (E) l'équation $87x + 31y = 2$ dans $\mathbb{Z}^2$. On désigne par $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) En utilisant l'égalité de Bézout, démontrer que a et b sont premiers entre eux. **1 pt**
b) En déduire que 87 et 31 sont premiers entre eux. **0,75 pt**
c) Trouver un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tels que $87u_0 + 31v_0 = 2$. **0,75 pt**
2. Utiliser les questions précédentes pour résoudre (E) . **1,25 pt**
3. Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ dont les coordonnées (x, y) vérifient les deux conditions suivantes :
i) x et y sont des entiers naturels.
ii) $0 \leq x \leq 100$. **1,25 pt**

Indication : On pourra remarquer que $M(x, y)$ appartient à $(\mathcal{D})$ si, et seulement si, $(x, -y)$ est solution de (E) .

Exercice 1 Série E uniquement (5 points)

Un test de recrutement dans une entreprise est constitué de 5 questions. Pour chaque candidat, on attribue +2 points pour une réponse juste et -2 points pour une réponse fausse ou non donnée. On note n le nombre de réponses justes données par un candidat.

1. a) Montrer que la note N d'un candidat à la fin du test est $N = 4n - 10$. **1 pt**
b) En déduire l'ensemble des notes possibles qu'un candidat à ce test peut avoir. **1 pt**
2. Le candidat Eya trouve les réponses exactes des deux premières questions. Il répond au hasard aux trois dernières questions. On admet que sa réponse est juste avec la probabilité de $\frac{1}{3}$ et pour tout autre candidat la probabilité de donner une réponse juste à une des cinq questions est de $\frac{1}{2}$.
a) Déterminer l'ensemble des notes que Eya peut avoir à la fin du test. **1 pt**
b) Pour être recruté dans l'entreprise, un candidat doit obtenir à l'issue du test une note supérieure ou égale à 6. Quelle est la probabilité pour que :
 A : « Eya réussisse au test » ? **1 pt**
 B : « Un candidat autre que Eya réussisse au test » ? **1 pt**

Exercice 2 (5 points)

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points : $A(2, 0, 1)$, $B(3, -2, 0)$ et $C(2, 8, -4)$.

1. Soit $M(x, y, z)$ un point. Exprimer en fonction de x , y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$. **1 pt**

2. Résoudre le système
$$\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$$
 1 pt

On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.

3. Démontrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées de N . **1 pt**

4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}H$ où $\mathcal{B}$ représente l'aire d'une base et H la hauteur relative à cette base.

a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est égal à $\frac{1}{6}CN^2$. **1 pt**

b) Calculer l'aire du triangle ABC . **0,5 pt**

c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC) . **0,5 pt**

Problème (10 points)



Partie A

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 3z + 4 = 0$. **0,75 pt**

b) Déterminer le module de chaque racine de cette équation. **0,5 pt**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. z désigne un nombre complexe non nul de partie imaginaire positive. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, z et z^2 et on note S le système de points pondérés $\{(A, 4), (B, -3), (C, 1)\}$. Ce système est tel que O est son barycentre.

2. a) Démontrer que z est solution de (E) . **0,5 pt**

b) En déduire les coordonnées de B et C . **0,5 pt**

3. a) k désignant un nombre réel, on pose $z = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$. Préciser, suivant les valeurs de k , l'ensemble (I) des points M du plan tels que $4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = k$. **1 pt**

b) On suppose $k = 89$. Donner alors une équation cartésienne de (I) , puis tracer (I) . **0,75 pt**

Partie B

On considère l'équation différentielle $(E') : y'' + 4y' + 4y = 0$ et les fonctions f et g , de la variable réelle x , définies respectivement par : $f(x) = xe^{-2x} + x - \frac{5}{4}\ln 2$ et $g(x) = 1 + (-2x + 1)e^{-2x}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité de longueur sur les axes : 2 cm).

1. a) Dresser le tableau de variations de g . **0,5 pt**

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . **0,25 pt**

2. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis la dérivée de f . **0,75 pt**

b) Dresser le tableau de variations de f . **0,5 pt**

3. a) Calculer $f(\ln 2)$. **0,25 pt**

b) Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x - \frac{5}{4}\ln 2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$. Étudier la position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite $(\mathcal{D})$. Tracer $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}_f)$. **1,25 pt**

4. a) Déterminer la forme générale des solutions de (E') . **0,5 pt**

b) Déterminer la solution de (E') dont la courbe admet une tangente en O parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$. **0,5 pt**

c) Démontrer que la fonction f est une solution de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 4x - 5\ln 2 + 4$. **0,5 pt**

5. Soit λ un réel strictement positif et $(\mathcal{D}_\lambda)$ la partie du plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 0$, $x = \lambda$, $y = x - \frac{5}{4}\ln 2$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

a) En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm^2 , l'aire de $(\mathcal{D}_\lambda)$ en fonction de λ . **0,5 pt**

b) Calculer la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$. **0,5 pt**