Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Bacc **Session :** 2019
Série : C-E
Épreuve : Mathématiques
Durée : 4 heures
Coefficient : 5(C) ; 4(E)

L'épreuve est constituée de 3 exercices et d'un problème que chaque candidat traitera obligatoirement.

EXERCICE 1 / (3 points)

Dans l'espace orienté et rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, A, B, C et D sont quatre points tels que A, B et C soient non alignés. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$. **0,75 pt**

2. On donne pour toute la suite de l'exercice : $A(1,2,1)$, $B(2,1,1)$, $C(0,1,-1)$ et $D(2,4,1)$.

a. Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires. **0,75 pt**

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC). **0,75 pt**

c. Déterminer l'expression analytique de la réflexion par rapport au plan (ABC). **0,75 pt**

EXERCICE 2 / (4 points)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :
$z^2 - (1-2\mathrm{i})z + 1 + 5\mathrm{i} = 0$ **1 pt**

2. On suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
A et B sont les points d'affixes respectives $z_A = 2 - 3\mathrm{i}$ et $z_B = -1 + \mathrm{i}$.

a. Soient $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 7 et $(\mathscr{C}')$ le cercle de centre B et de rayon 1.

i. Montrer que tout point du cercle $(\mathscr{C}')$ est intérieur au cercle $(\mathscr{C})$. **0,5 pt**

ii. Soit $(\mathscr{C}'')$ un cercle de centre Ω, extérieurement tangent à $(\mathscr{C}')$ et intérieurement tangent à $(\mathscr{C})$. Justifier que $\Omega A + \Omega B = 8$. **0,5 pt**

b. O' désigne le milieu de $[AB]$; on pose $\vec{\imath} = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{AB}$ et on désigne par $\vec{\jmath}$ le vecteur unitaire tel que $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ soit un repère orthonormé direct auquel le plan est maintenant rapporté.
On pose $\overrightarrow{O'\Omega} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ où $x \in [-4, 4]$ et on désigne par $(\mathscr{D})$ la droite d'équation : $x = \dfrac{32}{5}$.

i) Justifier que $\Omega A = \sqrt{\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + y^2}$ et $\Omega B = \sqrt{\left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 + y^2}$. **0,5 pt**

ii) Montrer que : $\Omega A + \Omega B = 8 \Rightarrow \Omega A = -\dfrac{5}{8}x + 4$. **0,75 pt**

iii) En déduire que si $\Omega A + \Omega B = 8$ alors $\dfrac{\Omega A}{\mathrm{d}(\Omega, (\mathscr{D}))} = \dfrac{5}{8}$ et donner la nature de la conique à laquelle Ω appartient. **0,75 pt**

EXERCICE 3 / (3 points)

Une urne contient 7 boutes noires et 7 boules jaunes indiscernables au toucher. On tire au hasard et successivement, avec remise, n boules de cette urne avec $n > 1$.

1. Calculer la probabilité d'obtenir des boules de même couleur. **0,75 pt**

2. Justifier que la probabilité p d'obtenir exactement une boule noire est : $p = \dfrac{n}{2^n}$. **0,75 pt**

3. On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ avec $n > 1$.
Soit n un entier strictement supérieur à 1 :

a. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire que la suite (u_n) est décroissante. **0,75 pt**

b. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0. **0,75 pt**

PROBLÈME (10 points)

On considère la fonction g définie dans l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln x$.

PARTIE A (3 points)

(E_0) et (E) sont les équations différentielles définies par $(E_0) : v(x) + xv'(x) = 0$ et $(E) : v(x) + xv'(x) = 3x^2 + \ln x + 1$ où v est une fonction définie et dérivable dans l'intervalle $]0,+\infty[$ et v' sa dérivée.

1. Vérifier que g est une solution de (E) et justifier que la fonction u définie dans $]0,+\infty[$ par $u(x) = \dfrac{1}{x}$ est une solution de (E_0). **1 pt**

2. Soit w une autre solution de (E_0) et k la fonction définie dans l'intervalle $]0,+\infty[$ par $k(x) = \dfrac{w(x)}{u(x)}$.
Montrer que k est une fonction constante et en déduire toutes les solutions de (E_0). **1 pt**

3. Soit h une fonction définie et dérivable dans $]0,+\infty[$.
a. Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $h - g$ est solution de (E_0). **0,5 pt**
b. Déduire la forme générale des solutions de (E). **0,5 pt**

PARTIE B (1,75 point)

1. Étudier les variations de la fonction g. **1 pt**

2. En déduire que :
a. L'équation $g(x) = 0$ admet sur $]0,+\infty[$ une unique solution α et justifier que $\alpha_0 = 0,65$ est une valeur approchée de α à 10^{-2} près par défaut. **0,5 pt**
b. $g(x) > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$. **0,25 pt**

PARTIE C (5,25 points)

Pour toute la suite, f est la fonction définie dans l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2(x)}$ et on désigne par (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. La fonction g reste la même.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **0,5 pt**

2. Déterminer f' et vérifier que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{xf(x)}$. **0,5 pt**

3. Dresser le tableau de variation de f. **0,5 pt**

4. **a.** Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$. **0,5 pt**
b. Tracer (C_f) avec soin. *(unités d'axe : 1,5 cm ; Prendre $\alpha = 0,6$)* **1 pt**

5. Soit $M(x,y)$ un point de la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \ln x$.
a. Justifier que $OM = f(x)$. **0,25 pt**
b. En déduire l'abscisse du point M en lequel la distance OM est minimale. **0,25 pt**

6. Soit x un réel strictement positif,
a. Justifier que $x \leqslant f(x)$. **0,25 pt**
b. Montrer que $\sqrt{x^2 + \ln^2(x)} - x \leqslant \dfrac{\ln^2(x)}{2x}$. **0,5 pt**

7. **a.** Déduire que : $\dfrac{3}{2} \leqslant \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{6}\ln^3(2) + \frac{3}{2}$. **0,5 pt**
b. En déduire, en unité d'aire, une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de l'aire de la portion du plan constituée des points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$. **0,5 pt**