



L'épreuve comporte trois exercices et un problème, le tout sur deux pages.

Exercice 1 : 3,25 points

Soit à résoudre le système :
$$\begin{cases} x = \sqrt{2y + 3} \\ y = \sqrt{2z + 3} \\ z = \sqrt{2x + 3} \end{cases}$$
 où x, y et z sont des nombres réels.

1) Première approche : **série E uniquement**

- a) Montrer que le triplet $(3, 3, 3)$ est une solution de ce système. 0,25 pt
- b) Montrer que si le triplet (x, y, z) est une solution de ce système, on ne peut pas avoir $x < 3$. 1,25 pt
- c) Montrer que si le triplet (x, y, z) est une solution de ce système, on ne peut pas avoir $x > 3$. 1,25 pt
- d) Déduire alors l'ensemble solution de ce système. 0,5 pt

2) Deuxième approche : **série C uniquement**

- a) Montrer que si le triplet (x, y, z) est solution de ce système, alors x, y et z sont solutions de l'équation : $t^8 - 12t^6 + 30t^4 + 36t^2 - 128t - 183 = 0$. 1,25 pt
- b) En déduire les valeurs rationnelles de x, y et z . 2 pts

Exercice 2 : 3 points

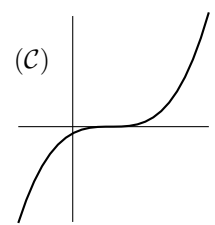
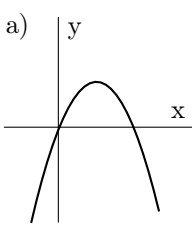
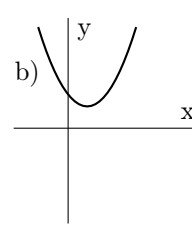
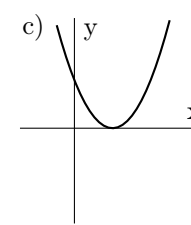
- (i) On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
- (ii) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a : $u_n \leq v_n$.

1) Compléter les phrases ci-après par le mot qui convient :

- a) Toute suite croissante et majorée est 0,25 pt
- b) Toute suite décroissante et est convergente. 0,25 pt

2) Indiquer si la proposition ci-après est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

3) Relier en justifiant votre choix la courbe $(\mathcal{C})$ de la colonne (I) à la courbe $(\mathcal{C}')$ de sa fonction dérivée dans la colonne (II). 1 pt

Colonne (I)	Colonne (II)		
			

Exercice 3 : 3,75 points

On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la famille des endomorphismes f_λ de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice M_λ relativement à la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $\begin{pmatrix} -1 + \lambda & 1 + \lambda \\ \lambda(1 - \lambda) & \lambda \end{pmatrix}$, où λ est un réel.

1) À quelles conditions sur λ , f_λ est-il un automorphisme ? 0,5 pt

- 2) Une boîte Ω contient cinq boules numérotées $-2, -1, 0, 1$ et 2 , toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de Ω et on note (p, q) le couple de numéros obtenus.
- On désigne par X l'aléa numérique qui à tout couple (p, q) associe la valeur :
- -2 si aucun des f_p et f_q n'est un automorphisme.
 - 1 si un seul parmi f_p et f_q est un automorphisme.
 - 3 si les deux f_p et f_q sont des automorphismes.
- a) Déterminer la loi de la probabilité de X . **0,75 pt**
- b) Calculer l'espérance et l'écart-type de X . **1 pt**
- 3) Déterminer une équation cartésienne du noyau et de l'image de $f_{(-2)}$. **1 pt**
- 4) Soit g l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par : $g(x, y) = \frac{1}{2} \left(-x + 3y, \frac{1}{2}x + y \right)$. **0,5 pt**
- g appartient-elle à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$? Justifier.

Problème : 10 points

Ce problème comporte trois parties indépendantes A, B et C.

Partie A : 3,75 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'équation (E) : $z^3 + 64i = 0$.

- 1) Déterminer une solution z_0 de (E) telle que : $\overline{z_0} = -z_0$. **0,5 pt**
- 2) Déterminer les deux autres solutions z_1 et z_2 de (E), où z_1 a une partie réelle négative. **1 pt**
- 3) Les points A, B et C ont pour affixes respectives : $-2\sqrt{3} - 2i$, $2\sqrt{3} - 2i$ et $4i$. **1,5 pt**
- Déterminer la nature du triangle ABC et montrer que les points A, B et C appartiennent à une conique dont on précisera la nature et les éléments caractéristiques.
- 4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f du plan **0,75 pt**
- qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que : $(z' - 4i) = r e^{i\theta} (z - 4i)$ et qui transforme le point A en B ;
- r et θ étant des nombres réels.

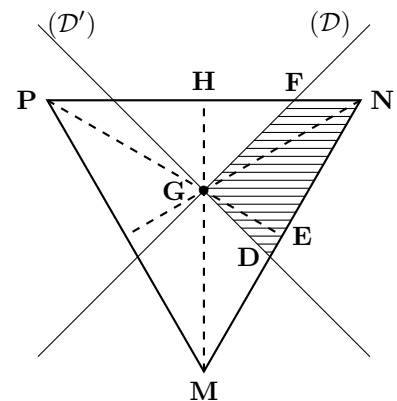
Partie B : 5 points

Un triangle équilatéral MNP de côté 2 est divisé en quatre parties par deux droites perpendiculaires passant par son centre de gravité G.

(Voir figure ci-contre où $FH = x$ et $DE = y$.)

On se propose de déterminer la valeur maximale de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée.

- 1) Démontrer que $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}(x - y)$. **0,5 pt**
- 2) Démontrer que $y = \frac{3x - 1}{3(x + 1)}$. **1,5 pt**
- 3) En déduire la valeur maximale de $\mathcal{A}$. **2 pts**
- 4) L'espace est associé à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. **1 pt**



On donne : $M(0, 2, 0)$, $N(\sqrt{3}, 1, 0)$ et $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

Déterminer le système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire au triangle MNP en son centre de gravité.

Partie C : 1,25 point

f est la fonction numérique d'une variable réelle x définie par : $f(x) = e^{2e^x}$.

On pose $g(x) = \ln f(x)$.

Montrer que g est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.