



*Cette épreuve est constituée de 3 exercices et d'un problème que chaque candidat traitera obligatoirement.*

**EXERCICE 1 (3 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, -1, 0)$ ,  $B(3, 0, 1)$ ,  $C(1, 2, -1)$  et  $D(1, 0, 0)$ .

1. Démontrer que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires. 0,5 pt
2. a) Écrire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ . 0,5 pt  
b) Calculer le volume du tétraèdre  $ABCD$ . 0,75 pt  
c) Déterminer l'expression analytique de la réflexion  $f$  par rapport au plan  $(ABC)$ . 0,75 pt
3. Soit  $(\mathcal{S})$  la sphère de centre  $D$  passant par  $B$ .  
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image  $(\mathcal{S}')$  de  $(\mathcal{S})$  par  $f$ . 0,5 pt

**EXERCICE 2 (4,5 points)**

1. On considère les équations différentielles suivantes :  
 $(E) : y'' - 4y' + 4y = 2 \cos x + \sin x$  et  $(E_0) : y'' - 4y' + 4y = 0$ .  
a. Déterminer les nombres réels  $a$  et  $b$  pour lesquels la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  par  $g(x) = a \cos x + b \sin x$  est solution de  $(E)$ . 0,5 pt  
b. Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est une solution de  $(E)$  si, et seulement si,  $f - g$  est une solution de  $(E_0)$ . 0,5 pt  
c. Résoudre l'équation  $(E_0)$  et en déduire la forme générale des solutions de  $(E)$ . 0,75 pt
2. Soit la fonction  $h$  définie dans  $[0, \pi[$  par  $h(x) = \frac{2}{5} \cos x - \frac{1}{5} \sin x$ . On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
a) Calculer, pour tout  $x$  de  $[0, \pi[$ ,  $h'(x)$  et  $h''(x)$ . 0,5 pt  
b) Étudier les variations de  $h'$  sur  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  et en déduire que l'équation  $h'(x) = 0$  dans  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  admet une unique solution  $\alpha$  avec  $2,6 < \alpha < 2,7$ . 0,75 pt  
c) Montrer que  $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]\alpha, \pi[$  et dresser le tableau de variations de  $h$ . 0,75 pt  
d) Tracer  $(\mathcal{C})$ . (Prendre  $\alpha = 2,6$  et pour unité de longueur sur les axes : 1,5 cm) 0,75 pt

**EXERCICE 3 (2,5 points)**

1. Soit  $a$  un réel strictement positif.  
a) Montrer que :  $1 - a < \frac{1}{1+a} < 1$ . 0,5 pt  
b) Déduire que :  $a - \frac{a^2}{2} < \ln(1+a) < a$ . 0,25 pt
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On pose  $P_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$ .  
a) Justifier que :  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . 0,5 pt  
b) Montrer que :  $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{12} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} < \ln P_n < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . 0,75 pt  
c) Déduire que la suite  $(P_n)$  converge et déterminer sa limite. 0,5 pt

### PROBLÈME (10 points)

Dans le plan  $(\mathcal{P})$  rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$ , on considère l'application  $\Psi$  définie par :  $\Psi(O) = O$  et pour tout point  $M$  de  $(\mathcal{P})$  distinct de  $O$ ,  $\Psi(M) = M'$  tel que  $\overrightarrow{OM'} = \frac{4}{OM^2} \overrightarrow{OM}$ .

#### Partie A (6 points)

1. a) Montrer que, pour tout point  $M$  de  $(\mathcal{P})$ ,  $\Psi \circ \Psi(M) = M$ . 0,75 pt

b) Justifier que l'ensemble des points  $M$  de  $(\mathcal{P})$  distincts de  $O$  tels que  $\Psi(M) = M$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 2. 0,75 pt

Pour toute la suite,  $(\mathcal{D})$  est une droite quelconque de  $(\mathcal{P})$ ,  $D$  est un point fixé de  $(\mathcal{D})$  distinct de  $O$ ,  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $(\mathcal{D})$ . On pose  $\vec{e}_2 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$  et on suppose le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . On donne  $\overrightarrow{OD} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ .

2. Justifier que  $(\mathcal{D})$  est l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $z = a + it$ , où  $t \in \mathbb{R}$ . 0,5 pt

3. Soient  $M$  et  $M'$  deux points de  $(\mathcal{P})$  tous distincts de  $O$  et d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ .

a) Montrer que  $\Psi(M) = M' \Leftrightarrow z' = \frac{4}{\bar{z}}$ . 0,75 pt

b) En posant  $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + t\vec{e}_2$  et  $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$ , montrer que :

$$\Psi(M) = M' \Leftrightarrow x' = \frac{4a}{a^2 + t^2} \text{ et } y' = \frac{4t}{a^2 + t^2}. \quad \text{0,75 pt}$$

c) Vérifier que dans ce cas  $\left(x' - \frac{2}{a}\right)^2 + y'^2 = \frac{4}{a^2}$ . 0,5 pt

d) Dédire que si  $M$  appartient à  $(\mathcal{D})$ , alors  $\Psi(M)$  appartient au cercle  $(\mathcal{C}_1)$  de diamètre  $[OH']$  où  $H'$  est l'image par  $\Psi$  du projeté orthogonal  $H$  de  $O$  sur  $(\mathcal{D})$ . 1 pt

4. Soit  $h$  l'application affine qui à tout point  $M(x, y)$  associe le point  $M_1(x_1, y_1)$  tel que  $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = \frac{2}{3}y \end{cases}$

Montrer que l'image de  $(\mathcal{C}_1)$  par  $h$  est une ellipse dont on donnera l'excentricité. 1 pt

#### Partie B (4 points)

Dans le plan vectoriel  $(\vec{\mathcal{P}})$  associé à  $(\mathcal{P})$ , on considère l'application  $\varphi$  telle que  $\varphi(\vec{0}) = \vec{0}$  et  $\varphi(\vec{u}) = \frac{4}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$  si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ .

1. Soit  $\vec{v}$  un vecteur non nul. Exprimer  $\varphi\left(\frac{4}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}\right)$  en fonction de  $\vec{v}$  et en déduire que  $\varphi$  n'est pas une application linéaire. 1 pt

2. a) Déterminer l'ensemble  $\text{Inv}(\varphi)$  des vecteurs  $\vec{u}$  de  $(\vec{\mathcal{P}})$  tels que  $\varphi(\vec{u}) = \vec{u}$ . 1 pt

b) Soient  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  deux vecteurs de  $(\vec{\mathcal{P}})$  tels que  $\|\vec{u}_1\| = \|\vec{u}_2\| = 2$  et  $\text{Mes}(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2}) = \frac{\pi}{3}$ .  
Calculer  $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|$  et en déduire que  $\text{Inv}(\varphi)$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $(\vec{\mathcal{P}})$ . 1 pt

3. Soit  $\text{Opp}(\varphi)$  l'ensemble des vecteurs  $\vec{u}$  de  $(\vec{\mathcal{P}})$  tels que  $\varphi(\vec{u}) = -\vec{u}$ .

Déterminer  $\text{Opp}(\varphi)$  et montrer que  $\text{Opp}(\varphi)$  est un sous-espace vectoriel de  $(\vec{\mathcal{P}})$ . 1 pt