



EXERCICE 1 : 3 points

Pour tout entier naturel n , on considère $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \sin x \, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nx}{2}} \cos x \, dx$.

1. En utilisant une intégration par parties, montrer que
 $2I_n + nJ_n = 2$ et $nI_n - 2J_n = -2e^{-\frac{n\pi}{4}}$. **[1,5 pt]**
2. Dédire de 1. les expressions de I_n et J_n en fonction de n , pour tout entier naturel n . **[1 pt]**
3. Les suites (I_n) et (J_n) sont elles convergentes ? **[0,5 pt]**

EXERCICE 2 : 3 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -6, -1)$, $C(2, 2, 2)$ et $I(0, 1, -1)$.

1. a. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ **[0,5pt]**
b. Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ contenant les points A , B et C . **[0,5pt]**
2. a. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de I sur le plan $(\mathcal{P})$. **[0,75 pt]**
b. $(\mathcal{S})$ est la sphère de centre I et de rayon 3.
Déterminer l'intersection du plan $(\mathcal{P})$ et de la sphère $(\mathcal{S})$. **[1,25 pt]**

EXERCICE 3 : 4 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$ cm.

r_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, r_2 est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et r_2^{-1} est la transformation réciproque de r_2 .

Si M est un point du plan, on note M_1 l'image du point M par r_1 et M_2 l'image du point M par r_2 .

1. On pose $f = r_1 \circ r_2^{-1}$.
a. Montrer que f est une symétrie centrale et déterminer $f(M_2)$. **[0,75 pt]**
b. En déduire que le milieu I du segment $[M_1M_2]$ est le centre de la symétrie f . **[0,5 pt]**
2. On suppose que A et B ont pour affixes respectives -3 et $+3$. On note z , z_1 et z_2 les affixes respectives des points M , M_1 et M_2 .
a. Exprimer z_1 et z_2 en fonction de z . **[1 pt]**
b. Montrer que si M est distinct de A et de B , on a : $\frac{z_2 - z}{z_1 - z} = i\sqrt{3} \frac{z - 3}{z + 3}$. **[0,75 pt]**
c. En déduire que : $\left(\widehat{MM_1, MM_2}\right) \equiv \left(\widehat{MA, MB}\right) + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. **[0,5 pt]**
d. Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{S})$ des points M du plan tels que M , M_1 et M_2 soient alignés. **[0,5 pt]**

PROBLÈME : 10 points

On considère la famille de fonctions f_λ définies par $f_\lambda(x) = 1 + \ln(1 + \lambda x)$ où λ est un réel non nul, $\ln$ désigne le logarithme népérien, $(\mathcal{C}_\lambda)$ la courbe de f_λ et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = x$ dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Recherche des points d'intersection de $(\mathcal{C}_\lambda)$ et $(\mathcal{D})$ **4 points**

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_λ . **[0,5 pt]**



On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

2. On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations. En déduire le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C}_\lambda)$ et $(\mathcal{D})$. [1 pt]

3. a. On suppose $\lambda > 0$. Étudier les variations de φ_λ et dresser son tableau de variations. Établir que la plus grande valeur prise par φ_λ quand x décrit son ensemble de définition est

$$m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \ln \lambda. \quad [1 \text{ pt}]$$

b. Étudier les variations de m sur $]0, +\infty[$. En déduire le signe de $m(\lambda)$. [1 pt]

c. Déterminer le nombre de points communs à $(\mathcal{C}_\lambda)$ et $(\mathcal{D})$ lorsque λ est positif. [0,5 pt]

Partie B : Étude du cas particulier $\lambda = 1$

2,75 points

1. a. Soit (Γ) la courbe de la fonction logarithme népérien. Trouver une translation qui transforme (Γ) en $(\mathcal{C}_1)$. [0,5 pt]

b. Représenter graphiquement la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et la droite $(\mathcal{D})$. [0,75 pt]

(On prendra pour unité 3 cm sur les axes.)

2. On appelle P et Q les points d'intersection de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{D})$. P est le point d'abscisse négative p et Q est le point d'abscisse positive q .

Démontrer que $2 < q < 3$.

[0,5 pt]

3. L'unité d'aire étant le cm^2 , calculer en fonction de p et q l'aire du domaine compris entre $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{D})$ et les droites d'équations $x = p$ et $x = q$. [1 pt]

On pourra utiliser une intégration par parties.

Partie C : Valeur approchée de q

3,25 points

On se propose de calculer une valeur approchée de q . On définit la suite (u_n) par
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$
 pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Représenter à l'aide de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ les termes u_1 et u_2 sur $(O, \vec{i})$. [0,5 pt]

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par q . [0,75 pt]

3. Montrer, en utilisant l'inégalité des accroissements finis, que $q - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(q - u_n)$ pour tout entier naturel n . [0,75 pt]

4. En déduire que pour tout entier naturel n : $q - u_n \leq \frac{q - u_0}{3^n}$,

et que la suite (u_n) converge vers q .

[0,75 pt]

5. Déterminer une valeur approchée u_k de q à 10^{-2} près en utilisant la suite (u_n) . [0,5 pt]