



L'épreuve comporte deux exercices et un problème.

EXERCICE 1 (Série E uniquement) (4 points)

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(-4, 6, -1)$, $B(1, 2, 2)$ et $C(-1, 4, 3)$.

1. a) Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés. 0,5 pt
b) Calculer l'aire du triangle ABC . 0,5 pt
2. Écrire une équation cartésienne du plan (ABC) . 1 pt
3. Soit I le milieu de $[AC]$ et $D = S_I(B)$ où S_I désigne la symétrie de centre I .
a) Démontrer que les points A , B , C et D sont coplanaires. 1 pt
b) Donner la nature du quadrilatère $ABCD$ puis calculer son aire. 1 pt

EXERCICE 1 (Série C uniquement) (4 points)

L'entier naturel S désigne la somme des diviseurs positifs de p^4 où p est un nombre premier plus grand que 2.

1. Exprimer S en fonction de p . 0,5 pt
2. Démontrer que $(2p^2 + p)^2 < 4S < (2p^2 + p + 2)^2$ 1 pt
3. On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.
a) Établir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé. 0,5 pt
(On pourra utiliser la question 2.)
b) Exprimer n en fonction de p . 0,5 pt
c) Établir que p vérifie la relation $3 + 2p - p^2 = 0$. (On utilisera le fait que $4S = 4n^2$) 1 pt
d) Dédurre, de 3. c), p et puis n . 0,5 pt

EXERCICE 2 (4 points)

Un dé cubique pipé est tel que : deux faces sont marquées 2, trois faces sont marquées 4 et une face est marquée 6.

La probabilité p_i d'apparition de la face marquée i est proportionnelle au nombre i .

1. Calculer les nombres p_2 , p_4 et p_6 . 1,5 pt
2. On suppose dans la suite que $p_2 = 1/6$, $p_4 = 1/3$ et $p_6 = 1/2$.
On lance deux fois de suite le dé précédent, on note i le résultat du premier lancer et j le résultat du deuxième lancer. On définit la variable aléatoire X qui au couple (i, j) associe le nombre $i - j$.
a) Déterminer l'univers-image de X . 1 pt
b) Déterminer la loi de probabilité de X . 1,5 pt

PROBLÈME : 12 points

Le problème comprend trois parties A, B et C obligatoires. La partie C est indépendante.

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a) Calculer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variations de f . 0,75 pt
b) Étudier le signe de la dérivée seconde et en déduire la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à sa tangente (T_0) en O . 0,75 pt

- c) Démontrer que l'origine O du repère est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$. **0,5 pt**
2. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ que l'on précisera. **0,5 pt**
- b) Soit g la bijection réciproque de f et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative.
- Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. **0,5 pt**
3. Construire dans le même graphique les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$. **1,5 pt**
(On prendra 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées)
4. Pour tout entier naturel n strictement positif, on définit la suite numérique (U_n) par :
- $$U_n = \int_0^{\frac{n-1}{n}} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] dx.$$
- a) En utilisant l'intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $U_n = \frac{2n-1}{n} \ln\left(\frac{2n-1}{n}\right) - \frac{\ln n}{n}$. **1 pt**
- b) Calculer la limite de la suite (U_n) et interpréter graphiquement le résultat. **0,75 pt**



Partie B

5. Soit S la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta) : y = x$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + \vec{j}$. On pose : $\varphi = T \circ S$.
- a) Donner la nature de l'application φ . **0,5 pt**
- b) Construire l'image par φ de la courbe $(\mathcal{C}_f)$. **0,75 pt**
6. On considère les vecteurs $\vec{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \vec{i} - \vec{j}$, la droite $(\Delta') : x - y - 1 = 0$ et S' la symétrie orthogonale d'axe (Δ') .
- a) Vérifier que le triplet $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ forme un repère orthogonal du plan. **0,25 pt**
- b) Montrer que, dans la base $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ se décompose de façon unique sous la forme $\overrightarrow{OA} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, où $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont des vecteurs colinéaires respectivement à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$ que l'on précisera. **0,5 pt**
- c) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs de A sur (Δ) et sur (Δ') . Montrer que $\vec{V}_2 = 2\overrightarrow{HH'}$. En déduire que $T = T_1 \circ S' \circ S$, où T_1 est une translation dont on donnera le vecteur. **1 pt**
- d) Montrer que $\varphi = T_1 \circ S'$. **0,25 pt**

Partie C

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $x = 2$. Les points M et F du plan $(\mathcal{P})$ ont pour affixes respectives z et $1 - i$.

1. Exprimer, en fonction de z , la distance de M à la droite $(\mathcal{D})$. **0,5 pt**
2. On suppose que $z + \bar{z} - 4 \neq 0$.
Pour tout réel m strictement positif, (Γ_m) est l'ensemble des points M dont l'afixe z est solution de l'équation (E_m) suivante : $|z - 1 + i| - m|z + \bar{z} - 4| = 0$.
- a) Déterminer, suivant les valeurs de m , la nature de (Γ_m) . **1 pt**
- b) Pour $m = 1$, donner les éléments caractéristiques de (Γ_1) . **1 pt**