



L'épreuve comporte trois exercices et un problème répartis sur deux pages.

Exercice 1 : 3 points

On considère l'équation $(E) : 2\sqrt{2}\cos^2 x + (2 - \sqrt{2})\cos x - 1 = 0$ et le polynôme

$P(x) = 2\sqrt{2}x^2 + (2 - \sqrt{2})x - 1$ de la variable réelle x .

- 1- Calculer $P\left(\frac{1}{2}\right)$. 0,5 pt
- 2- Vérifier que le polynôme $P(x)$ admet deux racines distinctes. 0,5 pt
- 3- En utilisant la somme ou le produit des racines, déterminer l'autre racine. 0,5 pt
- 4- En déduire, dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, l'ensemble solution de l'équation (E) . 1 pt
- 5- Placer les points images des solutions de (E) sur un cercle trigonométrique. 0,5 pt

Exercice 2 : 4 points

E est un plan vectoriel, $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base de E et f est l'endomorphisme de E défini par : $f(\vec{i} - \vec{j}) = 3\vec{i} - \vec{j}$ et $f(\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + 5\vec{j}$.

- 1- Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. 0,75 pt
 - 2- Soit g l'endomorphisme de E défini par $g(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j} + f(\vec{i})$ et $g(\vec{j}) = 8\vec{i} + f(\vec{j})$.
 - a) Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ de g dans la base $\mathcal{B}$. 0,75 pt
 - b) Montrer que $\text{Ker } g$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_1 = 6\vec{i} - 2\vec{j}$. 0,75 pt
 - c) Montrer que $\text{Im } g$ est une droite vectorielle dont une base est $\vec{e}_2 = 2\vec{i} + \vec{j}$. 0,75 pt
- On pose $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
- d) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E . 0,25 pt
 - e) Montrer que $g(\vec{e}_2) = 5\vec{e}_2$. 0,5 pt
 - f) En déduire la matrice $\mathbf{A}'$ de g dans la base $\mathcal{B}'$. 0,25 pt

Exercice 3 : 2 points

- 1- Déterminer les réels x et y tels que : $\begin{cases} x + y = 40 \\ x \times y = 256 \end{cases}$ 0,5 pt
- 2- a , b et c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique à termes positifs et décroissante tels que : $\begin{cases} a + b + c = 56 \\ a \times b \times c = 4096 \end{cases}$
 - a) Calculer 16^3 et déterminer b . 0,5 pt
 - b) En déduire a et c . 1 pt

Problème : 11 points

Le problème comporte trois parties I, II et III.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère $A(0, 2)$, $B(-2, 0)$ et $C(2, 0)$ trois points du plan. On note G le barycentre des points pondérés $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 1)$.

- I-1) Montrer que le point O est le milieu du segment $[BC]$. 0,5 pt
- 2) En déduire que le point G appartient à la droite (AO) . 0,25 pt
- 3) Déterminer les coordonnées du point G . 0,5 pt

- 4) Montrer que pour tout point M du plan : $AM^2 + OM^2 = 2GM^2 + 2$. **0,5 pt**
- 5) En déduire que l'ensemble (T) des points M du plan tels que : $2AM^2 + BM^2 + CM^2 = 28$ est un cercle dont on précisera le rayon et le centre. **0,75 pt**
- II-** Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois réels. On suppose que la courbe de la fonction f passe par les points A, B et C .
- 1) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$. **1,5 pt**
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > 0$. **0,5 pt**
- III-** Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{-x^2 + x - 4}{x}$, $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative.
- 1) Déterminer l'ensemble de définition D de g . **0,5 pt**
- 2) Déterminer les limites de g en $-\infty, +\infty, 0^-$ et 0^+ .
En déduire une équation de l'asymptote verticale à la courbe $(\mathcal{C})$. **1,25 pt**
- 3) Montrer que pour tout réel x différent de zéro,
 $g'(x) = \frac{2f(x)}{x^2}$ où g' est la fonction dérivée de g . **0,75 pt**
- 4) Déduire de la question **II-2)**,
le sens de variation de g et dresser son tableau de variations. **1 pt**
- 5) Montrer que pour tout réel x différent de zéro, $g(x) = -x + 1 - \frac{4}{x}$ et en déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x + 1$ est asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C})$. **1 pt**
- 6) Déterminer la distance du point G à la droite $(\mathcal{D})$ et en déduire que la droite $(\mathcal{D})$ est sécante au cercle (T) . Préciser les coordonnées de leurs points d'intersection. **1 pt**
- 7) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et ses asymptotes. (*unités sur les axes : 1 cm*) **1 pt**

