Bassin pédagogique de Douala III^{ème} **Année scolaire 2016-2017**
Evaluation harmonisée de la 4eme séquence **Classe T^{le}C**
Durée : 4h
Coef : 5

Épreuve de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

Exercice 1 : (4,5 points)

Partie A (3 points). On considère dans le plan un cercle de diamètre $[OB]$. Soit A un point de $[OB]$, distinct de O et de B, I le milieu de $[AB]$. La médiatrice de $[AB]$ coupe le cercle en M et M' tels qu'une mesure de $(\widehat{\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}})$ soit $\frac{\pi}{2}$. Soit N la projection orthogonale de A sur la droite (OM).

1. **a.** Donner la nature du quadrilatère $AMBM'$. ***0.25pt***
   b. En déduire que $(OM) \perp (AM')$ et que N, A, M' sont alignés. ***0.75pt***
2. Soit S la similitude directe de centre N, telle que $S(M) = A$.
   a. Préciser l'angle de cette similitude. ***0.25pt***
   b. Déterminer les images par S des droites (IM) et (NA). ***0.75pt***
   c. En déduire l'image par S de M'. ***0.25pt***
3. **a.** Montrer que l'image par S de I est I', milieu de $[OA]$. ***0.5pt***
   b. En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$. ***0.5pt***

Partie B (1,5 point). Soit f une application affine du plan dans lui-même telle que $f \circ f = Id_{\mathcal{P}}$.

1. Démontrer que f est bijective. ***0.25pt***
2. Soit E un point du plan et R le milieu de $[E, f(E)]$. Démontrer que R est invariant par f. ***0.5pt***
3. Soit Γ l'ensemble des points invariants par f.
   a. Justifier que Γ n'est pas vide. ***0.25pt***
   b. Démontrer que si Γ est un singleton, alors f est une symétrie centrale. ***0.5pt***

Exercice 2 (6,25 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher et parmi lesquelles deux portent le nombre -1, une le nombre 1, trois le nombre -2, trois le nombre 2 et une le nombre 3 .

On extrait au hasard, successivement et sans remise deux boules de cette urne. On note "a" le résultat obtenu au premier tirage et "b" celui obtenu au second tirage. On considère :

- ▶ l'équation polynômiale $(\mathbb{E}) : 2x^3 + 3x^2 + 6x + 9 = 0$;
- ▶ l'endomorphisme f d'un plan vectoriel $\mathcal{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathcal{P}$ est $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$;
- ▶ le point $B(a, 0, a)$ et la droite (Δ) de repère $(A, \overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u}(1, 1, 1)$ et $A(2a, b, 2a)$;
- ▶ le nombre complexe $z = a + ib$.

1. **a.** Montrer que si a et b sont deux entiers premiers entre eux, il en est de même de a et b^3. ***0.5pt***
   b. Déterminer les couples (a, b) d'entiers premiers entre eux pour lesquels $x_0 = \frac{a}{b}$ est une solution rationnelle de l'équation $(\mathbb{E})$. ***1pt***
   On remarquera que la seule solution rationnelle est sous la forme $-\frac{n+1}{n}$.
   c. Déterminer la probaboilité pour que $x_0 = \frac{a}{b}$ soit une solution rationnelle de l'équation $(\mathbb{E})$. ***0.75pt***
2. Déterminer la probabilité de l'évènement : " f est un automorphisme". ***0.75pt***
3. **a.** Quelles sont les racines carrées de $3 - 4i$? ***0.5pt***
   b. Déterminer la probabilité pour que $z = a + ib$ soit une racine carrée de $3 - 4i$. ***0.75pt***

t.me/KamerHighSchool

4. Déterminer la probabilité pour que la distance du point B à la droite (Δ) soit égale à $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. ***1pt***

5. On tire une boule et on note le nombre. Le tirage du nombre impair perd trois points, du nombre pair gagne deux points. On désigne par X la variable "nombre de points obtenus".
Déterminer la loi de X. ***1pt***

<u>Problème</u> (9.25 points)

Pour chaque entier naturel n, on définit, sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f_n par : $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x$.

Partie A : Etude du cas particulier $n = 0$/3 points

f_0 est donc la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f_0(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1. Construire dans un repère orthonormal, la courbe représentative de la fonction exponentielle, puis tracer sa tangente au point d'abscisse 0. ***0.75pt***
2. **a.** Justifier graphiquement l'inégalité suivante : pour tout réel u, $e^u > u + 1$. ***0.5pt***
   b. En déduire que pour tout réel x, $e^{-x} + x - 1 > 0$, puis que $1 + (x-1)e^x > 0$. ***0.75pt***
3. **Limites :**
   a. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$. ***0.25pt***
   b. Déterminer la limite de f_0 en 0. ***0.25pt***
4. **Sens de variation :**
   a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, on a $f_0'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}$. ***0.25pt***
   b. En déduire le sens de variation de f_0 sur l'intervalle $]0;+\infty[$. ***0.25pt***

Partie B : Etude de la famille de fonctions f_n $n > 1$/ 5 points

On appelle $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ précédent.

1. Donner le sens de variation de f_n sur l'intervalle $]0;+\infty[$. ***0.5pt***
2. Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et en 0. ***0.25pt***
3. Etudier les positions respectives des courbes $(\mathcal{C}_{n+1})$ et $(\mathcal{C}_n)$. ***0.5pt***
4. Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_n)$ passent par un même point B dont on précisera les coordonnées. ***0.5pt***
5. **a.** Montrer qu'il existe un unique réel α_1 appartenant à l'intervalle $\left[\frac{2}{10};\frac{9}{10}\right]$ tel que $f_1(\alpha_1) = 0$. ***0.5pt***
   b. Montrer que $f_n(\alpha_1) < 0$ pour tout entier naturel $n > 1$. ***0.5pt***
   c. Pour tout entier naturel $n > 1$, montrer qu'il existe un unique réel α_n appartenant à l'intervalle $[\alpha_1;1]$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$. ***0.5pt***
6. **a.** En utilisant la **partie A**, montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;1]$: $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$. ***0.5pt***
   b. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, $\ln(\alpha_n) > \frac{1-e}{n}$, puis que, $\alpha_n > e^{\frac{1-e}{n}}$. ***0.5pt***
   c. Déterminer la limite de la suite (α_n). ***0.5pt***
7. Construire sur le graphique précédent, la courbe $(\mathcal{C}_1)$. ***0.75pt***

Partie C : détermination d'une primitive sur $\mathbb{R}$./1.25 point

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 1 - g(x)$.

1. Justifier que la fonction g admet des primitives sur $\mathbb{R}$. ***0.25pt***
2. Déterminer une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$. ***0.5pt***
3. En déduire une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$. ***0.5pt***

t.me/KamerHighSchool