MINESEC
DELEGATION REGIONALE DE L'EXTREME-NORD
INSPECTION REGIONALE CHARGEE DE L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES
SECTION MATHEMATIQUES

Année scolaire 2019-2020
Baccalauréat Blanc
SERIE : C
Session de février 2020
Coefficient : 05 Durée : 4h

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte trois exercices et un problème, tous obligatoires. Le candidat devra se montrer rigoureux et clair dans la rédaction.

EXERCICE 1 : 03,25 points Dans l'ensemble *W* des vecteurs de l'espace, on définit l'endomorphisme φ par $\varphi(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$ et $\varphi(\vec{\jmath}) = \varphi(\vec{k}) = \vec{\jmath} - \vec{k}$.

1.1. Donner la matrice de φ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. **[0,25pt]**

1.2. Déterminer une base de Ker φ, le noyau de φ et une base de Im φ, l'image de φ. **[0,5pt]**

1.3. Montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})$ est une base de *W* avec $\vec{a} = \vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{b} = \vec{\jmath} + \vec{k}$. **[0,5pt]**

1.4. Donner la matrice M de φ dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{k})$. **[0,5pt]**

1.5. Pour tout entier naturel n, exprimer M^{n} en fonction de n. **[0,25pt]**

2. PQR est un triangle rectangle en P tel que $\mathrm{PQ} = 3\mathrm{k}$ et $\mathrm{PR} = 2\mathrm{k}$, $\mathrm{k} > 0$.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $-\mathrm{PM}^2 + 4\mathrm{QM}^2 + 3\mathrm{RM}^2 = 39\mathrm{k}^2$. **[0,75pt]**

3. A, B et C sont des points distincts de l'espace.
Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BM}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{CM}}$. **[0,5pt]**

EXERCICE 2 : 03,25 points

ABCD est un carré de sens direct et de centre K. Soit P un point de la droite (BC), distinct de B. Les droites (AP) et (CD) se coupent en E. La perpendiculaire à (AP) passant par A, coupe (BC) en R et (CD) en T.

1. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1.1. Déterminer l'image de la droite (BC) par r. **[0,5pt]**

1.2. En déduire les images de chacun des points P et R par la rotation r . **[0,5pt]**



2. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
On désigne par M le milieu du segment [RE] et par N le milieu du segment [PT].

2.1. Déterminer, en le justifiant, les images par s des points B, R et P. **[0,75pt]**

2.2. Déterminer le lieu géométrique du point N lorsque P décrit la droite (BC) privée de B. **[0,5pt]**

3. En déduire que les points M, B, K, D et N sont alignés. **[0,75pt]**

EXERCICE 3 : 03,5 points

1. $(\mathcal{C})$ est un cercle de centre O, et A est un point de $(\mathcal{C})$. Soit M un point de $(\mathcal{C})$ et P le symétrique de M par rapport à O. La parallèle à (OA) passant par M coupe la droite (AP) en N.
Déterminer le lieu géométrique de N lorsque M décrit $(\mathcal{C})$. **[1pt]**

2. On donne l'équation (E) : $5x - y = -3$

2.1. Résoudre (E). **[0,5pt]**

2.2. Soit les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_0 = 8 \\ y_{n+1} = 4y_n + 1 \end{cases}$

2.2.1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le couple (x_n , y_n) est solution de (E). **[0,5pt]**

2.2.2. En déduire que si $x_n \; et \; y_n$ ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux. **[0,5pt]**

2.3. On pose $u_n = x_n + a$ et $v_n = y_n + b$ où a et b sont des nombres réels.

2.3.1. Trouver les valeurs de a et b pour que les suites u et v soient géométriques. **[0,5pt]**

2.3.2. Déduire x_n et y_n en fonction de n ; puis étudier la convergence de chacune de ces suites. **[0,5pt]**

t.me/KamerHighSchool

Cette épreuve vous a été proposée par la cellule de réflexion/Clusters de Mathématiques de la Région de l'Extrême-Nord

PROBLEME : 10 points

Le problème comporte trois parties A, B et C. Les parties B et C sont liées.

Partie A : Soit a un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ ∈]-π ; π]

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^2 + a(a + i)z + ia^3 = 0$. **[0,75pt]**

2) Mettre les solutions sous forme trigonométrique. **[0,5pt]**

3) Déterminer a pour que les solutions de l'équation (E) soient conjuguées. **[0,75pt]**

Partie B : [3 Points]

Soit la fonction f définie sur $K =]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O (unité graphique $4cm$)

1.1. Etudier les variations de f et déterminer ses limites aux bornes de K. **[0.75pt]**

1.2. En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une droite asymptote (Δ), que l'on précisera. **[0.25pt]**

2.1. Ecrire une équation de la tangente (T_a) à $(\mathcal{C})$ en un point M de $(\mathcal{C})$ d'abscisse a. **[0.5pt]**

2.2. Montrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles (T_a) passe par l'origine O. **[0.5pt]**

3. Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On mettra en évidence la droite (Δ) et les tangentes trouvées ci-dessus. **[0.5pt]**

4. On pose, pour x dans K , $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. La fonction Fest-elle monotone ? Est-elle positive ? **[0.5pt]**

Partie C : [5 points]

On pose $J = \int_0^1 \frac{e^t}{1+t} dt$. L'objet de cette partie est d'encadrer J. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de J.

1. En utilisant l'étude de la fonction f réalisée dans la partie A, montrer que : $1 \leq J \leq \frac{e}{2}$ **[0.5pt]**

2. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t dt$

2.1. Calculer U_0. **[0.25pt]**

2.2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $U_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)U_n$. **[0.5pt]**

2.3. Calculer alors successivement $U_1, U_2, \ldots, U_6$. On donnera les réponses sous la forme $ae - b$, où a et b sont des entiers naturels. **[0.75pt]**

3.1. Montrer que : $U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \int_0^1 e^t \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t} dt$ **[0.5pt]**

3.2. En déduire que $J = U_0 + U_1 + \cdots + U_n + R_n$ où $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f(t)dt$ **[0.5pt]**

3.3. Prouver que : $\frac{1}{n+2} \leq |R_n| \leq \frac{e}{2(n+2)}$. **[0.5pt]**

4.1. Trouver le plus petit entier naturel n tel que : $\frac{e}{2(n+2)} - \frac{1}{n+2} < 0{,}05$ **[0.5pt]**

4.2. Calculer $S_6 = U_0 + U_1 + \cdots + U_6$ sous la forme $ae - b$, où a et b sont des entiers naturels. **[0.5pt]**

4.3. Prouver que $S_6 - \frac{e}{16} \leq J \leq S_6 - \frac{1}{8}$. **[0.5pt]**

4.4. En déduire de ce qui précède un encadrement de J d'amplitude 0.05, par deux nombres décimaux. **[0.5pt]**

Cette épreuve vous a été proposée par la cellule de réflexion/Clusters de Mathématiques de la Région de l'Extrême-Nord