

**EPREUVE DE MATHÉMATIQUES**



**PARTIE A : EVALUATION DES RESSOURCES 15,5 points**

**Exercice 1 : [4 points]**

Le plan muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $\alpha \in ]-\pi ; \pi]$  un nombre réel. On considère les

points pondérés  $(A; \sin \alpha)$ ,  $(B; \sin \alpha)$  et  $(C; 1)$  ; avec  $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$ ,  $B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$  et  $C\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$

1) a) Pour quelles valeurs de  $\alpha$  la famille  $\{(A; \sin \alpha); (B; \sin \alpha); (C; 1)\}$  admet-elle un barycentre G. **1 pt**

b) Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , montrer que le barycentre G de la famille  $\{(A; \sin \alpha); (B; \sin \alpha); (C; 1)\}$  est le centre de gravité du triangle ABC, puis construire G. **1pt**

2) On considère le point  $I\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \cos^2 \alpha \end{smallmatrix}\right)$  du plan.

Déterminer les valeurs de  $\alpha$  pour les quelles  $(AB) \perp (IC)$  **1pt**

3) Déterminer et construire le lieu géométrique des points M du plan tel que :

$$\text{mes}(\widehat{MA, MB}) = -\frac{\pi}{4}. \quad \mathbf{1pt}$$

**Exercice 2 : [3,75 points]**

1) Soit  $f$  une application linéaire d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  vers un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $F$ .

a) Montrer que si  $\ker f = \{\vec{0}_E\}$  alors  $f$  est injective. **0,75pt**

b) Montrer que si  $\text{Im } f = F$  alors  $f$  est surjective. **0,75pt**

2) Le plan vectoriel  $E$  est rapporté à la base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$ . On note  $\phi$  l'endomorphisme de  $E$  qui au vecteur

$$\vec{u}(x, y) \text{ associe le vecteur } \vec{v}(x', y') \text{ tel que : } \begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = x - y \end{cases}$$

a) Déterminer la matrice de  $\phi$  dans la base B. **0,25pt**

b) L'endomorphisme  $\phi$  est-il bijectif ? Justifier. **0,5pt**

c) Déduire le  $\ker \phi$  et  $\text{Im } \phi$ . **0,5pt**

3) On pose  $\vec{e}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$  et  $\vec{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j}$ .

Montrer que  $B' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base et détermine la matrice  $M'$  de  $\phi$  dans la base  $B'$ . **1pt**

**Exercice 3 : 3 points**

On considère un tétraèdre MNPQ dont les hauteurs issues des sommets M et N sont sécantes en un point K.

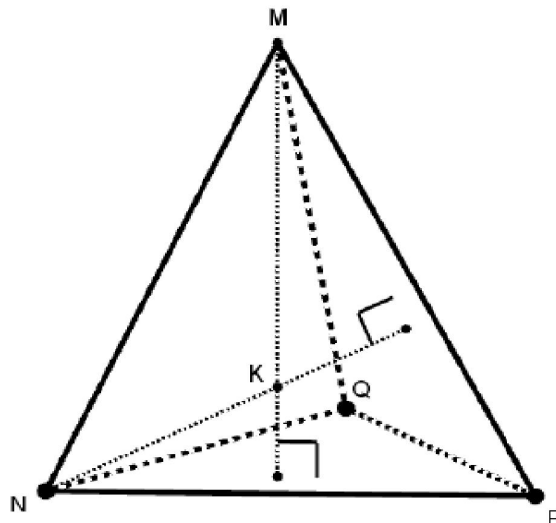
Les droites (MK), (NK), (PK) et (QK) sont donc orthogonales aux plans (NPQ), (MPQ), (MNQ), (MNP) respectivement.

1. a) Montrer  $(MK) \perp (PQ)$  et  $(NK) \perp (PQ)$  **0.5pt**

b) Démontrer que le plan (MNK) est orthogonal à la droite (PQ). **0.5 pt**

c) En déduire que les droites (MN) et (PQ) sont orthogonales. **0.5pt**

2. Démontrer que les droites (MP) et (NQ) sont orthogonales, ainsi que les droites (MQ) et (NP). **1.5pt**



**Exercice 4 : [4,75 points]**

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{-2x^2+5x-3}{2-x}$ .

- 1) a) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ , puis calculer les limites aux bornes de son  $Df$ .  
0,5pt
- b) En déduire que la courbe  $(C_f)$  de  $f$  admet une asymptote verticale  $(d_1)$  que l'on précisera.  
0,25pt
- 2) a) Déterminer les réels  $a$ ;  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x \in Df$ ,  $f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$ . 0,75pt
- b) En déduire une équation cartésienne de l'asymptote oblique  $(d_2)$  de  $(C_f)$ . 0,5pt
- 3) Étudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $(d_2)$ . 0,5pt
- 4) Montrer que le point  $\Omega(2; 3)$  est le centre de symétrie de  $(C_f)$ . 0,5pt
- 5) Dresser le tableau de variations de  $f$ . 0,75pt
- 6) Construire  $(C_f)$ . 1pt

**PARTIE B : EVALUATION DES COMPETENCES 04,5 points**

Monsieur Paul est un ingénieur. Pour créer son entreprise de fabrication d'emballage ménager en janvier 2006, il emprunte 75 millions F CFA dans une banque A à un taux annuel de  $x\%$ . L'ingénieur doit rembourser à la banque 87,45 millions F CFA au bout de deux ans.

L'entreprise n'écoule que 80% de sa production annuelle. Le bénéfice annuel réalisé est égale à  $m^2 - 13m$  (où  $m$  est la masse d'emballage ménager vendu en tonne). Monsieur Paul aimerait réaliser un bénéfice de 30 millions F CFA en janvier 2007.

Pour la protection de l'environnement, l'ingénieur décide de recycler ses produits à partir de février 2007. Les  $\frac{3}{4}$  des emballages ménagers utilisés sont recyclés par l'entreprise de Paul. En fin 2007, il a pu recycler 12 tonnes d'emballages ménagers.

- 1) Déterminer le taux annuel du prêt de Monsieur Paul. 1,5 pt
- 2) Quelle masse d'emballage ménager doit produire l'ingénieur pour réaliser un bénéfice de 30 millions F CFA en janvier 2007. 1,5 pt
- 3) Calculer la masse d'emballage ménager utilisé en 2007? 1,5 pt