MINEDUC - OFFICE DU BACCALAURÉAT **BACCALAURÉAT D**
Durée : 4 h Session 1997
Coef. : 4

MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 / 4 points

Une première urne contient sept boules numérotées de 1 à 7 ; une seconde urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard une boule de la première urne et une boule de la seconde urne.

1) Quelle est la probabilité pour que les numéros obtenus soient identiques ? **1 pt**

2) On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre la valeur absolue de la différence des numéros obtenus.
a. Déterminer la loi de probabilité de X. **1,5 pt**
b. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X. **1,5 pt**

`[on donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible]`

EXERCICE 2 / 5 points

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par : $P(z) = 2\,z^4 - 6\,z^3 + 9\,z^2 - 6\,z + 2$.

1) Démontrer que, si z_0 est racine de ce polynôme, les nombres $\dfrac{1}{z_0}$ et $\overline{z_0}$ sont aussi des racines de ce polynôme. **2 pts**

2) Calculer $(1+\mathrm{i})^2$, $(1+\mathrm{i})^3$ et $(1+\mathrm{i})^4$, puis $P(1+\mathrm{i})$. **1,5 pt**

3) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$, dont on admettra qu'elle a quatre solutions distinctes. **1,5 pt**

PROBLÈME / 11 points

A- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]-2, +\infty[$ par :

$$g(x) = (x+2)^2 - 1 + \ln(x+2)$$

1) Calculer $g'(x)$; en déduire le sens de variation de g. **0,75 pt**

2) Calculer $g(-1)$; en déduire le signe de $g(x)$, suivant les valeurs de x. **0,75 pt**

`[la représentation graphique de g n'est pas demandée]`

B- On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+2)}{x+2}$$

1) a. Déterminer les limites de $f(x)$ quand x tend vers -2^+ et quand x tend vers $+\infty$. **1 pt**
b. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+2)^2}$. **0,5 pt**
c. Dresser le tableau de variation de f. **0,5 pt**

2) On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f et $(\mathcal{D})$ la droite d'équation $y = x$.
a. Démontrer que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote verticale et la droite $(\mathcal{D})$ comme asymptote oblique. **1 pt**
b. Démontrer que $(\mathcal{C})$ rencontre $(\mathcal{D})$ en un seul point A, dont on précisera les coordonnées. **0,5 pt**
c. Démontrer qu'il existe un unique point B de $(\mathcal{C})$, où la tangente $(\mathcal{T})$ est parallèle à $(\mathcal{D})$; préciser les coordonnées de B et une équation de $(\mathcal{T})$. **1 pt**

d. Tracer avec soin la courbe $(\mathcal{C})$, sans oublier ses asymptotes (verticale et oblique) et la tangente $(\mathcal{T})$, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ [unité sur les axes : 2 cm]. **2 pts**

[on donne $e \approx 2{,}7$, $\frac{1}{e} \approx 0{,}37$, $\ln 2 \approx 0{,}7$ et $\ln 3 \approx 1{,}1$]

3) Soit $\lambda \geqslant -1$; calculer l'aire, notée $\mathscr{A}(\lambda)$, du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$, les droites d'équations $x = -2$ et $x = \lambda$. Quelle est la limite de $\mathscr{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$? **1,5 pt**

4) On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $[-1, +\infty[$.

a. Justifier que h est une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$. **0,5 pt**

b. Tracer la courbe représentative $(\mathcal{C}')$ de h^{-1}, dans le même repère que $(\mathcal{C})$. **1 pt**

[l'étude de h^{-1} n'est pas demandée]