

L'épreuve comporte trois exercices et un problème.

Les pages sont numérotées de 1 à 3.

La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.

Exercice 1 : 3 points

a et b sont deux entiers naturels non nuls. E désigne l'ensemble des entiers relatifs z tels qu'il existe deux entiers relatifs x et y vérifiant $z = ax + by$.

1. Démontrer que E contient au moins un entier naturel non nul. (0.5 pt)
2. On note d le plus petit entier naturel non nul de E .
 - a) Démontrer que tout multiple de d appartient à E . (0.5 pt)
 - b) Démontrer que tout élément z de E est un multiple de d . (0.5 pt)
(on pourra envisager la division euclidienne de z par d)
 - c) En déduire que E est l'ensemble des multiples de d . (0.5 pt)
3. Démontrer que d est le plus grand diviseur commun de a et b . (0.5 pt)

4. Application numérique :

Démontrer que l'ensemble des entiers relatifs z de la forme $z = 9\,801x + 11\,664y$ est égal à l'ensemble des multiples de 81. (0.5 pt)

Exercice 2 : 3,25 points

E désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$.

On note $\text{Ker } f$ le noyau de f et $\text{Im } f$ l'image de E par f .

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$. (0.5 pt)
2. Déterminer une base de $\text{Im } f$. (0.5 pt)
3. Démontrer que tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $\text{Ker } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } f$. (1 pt)
4. a) Vérifier que $f \circ f = f$. (1 pt)
b) Démontrer que $\vec{u} \in \text{Im } f \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$ (on utilisera 4.a) (0.75 pt)

Exercice 3 : 3,75 points

Sur la figure ci-après, $ABCD$ est un tétraèdre.

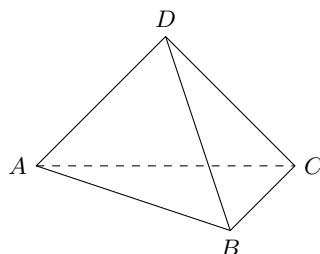
On appelle I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[AB], [CD], [BC], [AD], [AC]$ et $[BD]$.

G est l'isobarycentre des quatre sommets du tétraèdre.

1. Démontrer que les droites $(IJ), (KL)$, et (MN) sont concourantes en G . (0.75 pt)
2. A' désigne le centre de gravité du triangle ABC .
Montrer que les points D, G et A' sont alignés (0.75 pt)
3. Dans cette partie, on suppose l'espace orienté et les triangles BCD, BAD et BCA sont isocèles

et rectangles en B . On note r_1 le demi-tour d'axe (BA) et r_2 la rotation d'axe (BD) qui transforme C en A .

Refaire une autre figure et la compléter en construisant les images respectives A_1, B_1 et C_1 des points A, B et C par r_1 , puis les images A_2, B_2 et C_2 des points A_1, B_1 et C_1 par r_2 . (2 pts)
(On précisera ces images au cas où elles sont des points de la figure)



Problème: 10 points

Le problème comporte deux parties indépendantes.

Partie A

On considère un plan $(\mathcal{P})$ rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (toutes les coordonnées seront données par rapport à ce repère). On note :

- g l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{6}{5}x + \frac{2}{5}y + 1 \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}y + 2 \end{cases}$$

- M'' est le symétrique de M' par rapport à M .
- A_0 est le point de coordonnées $(3, 1)$.
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de points définie par $A_{n+1} = g(A_n)$.
- (x_n, y_n) sont les coordonnées de A_n .

1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction indépendante de M . (0.5 pt)
2. Déterminer l'ensemble des points M'' lorsque M décrit $(\mathcal{P})$. (0.75 pt)
3. Dédire des questions 1. et 2. une construction géométrique du point M' lorsque M est connu. (0.5 pt)
4. a) Démontrer que les points A_n appartiennent tous à la droite d'équation cartésienne $2x - y - 5 = 0$ (0.5 pt)
b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a $x_{n+1} = 2x_n - 1$ (0.5 pt)
5. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , x_n et y_n sont des nombres entiers. (0.5 pt)
b) Démontrer que pour tout entier naturel n , $x_n = 2^{n+1} + 1$ (0.5 pt)
c) En déduire que la suite réelle (x_n) est divergente. (0.5 pt)



Partie B

On considère :

- ♦ la fonction f de la variable réelle x telle que $f(x) = e^{3x-3} + x$;
- ♦ les équations différentielles $(E) : y'' - y' - 6y = -6x - 1$ et $(E') : y'' - y' - 6y = 0$.

On note :

- ♦ $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan (*unité de longueur sur les axes, 2 cm*) ;
- ♦ $(\mathcal{D})$ la partie du plan définie par les droites d'équations $x = 0$, $y = x$, $x = \lambda$ ($\lambda > 0$) et la courbe $(\mathcal{C})$;
- ♦ $\mathcal{A}_\lambda$ l'aire en cm^2 de $(\mathcal{D})$ en fonction de λ .

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f . (1 pt)
2. Démontrer que $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses en un point A dont l'abscisse α vérifie $-1 < \alpha < 0$. (0.5 pt)
3. a) Démontrer que lorsque x tend vers $-\infty$, $(\mathcal{C})$ admet la droite d'équation $y = x$ comme asymptote oblique. Préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à cette asymptote. (0.5 pt)
b) Étudier le comportement de $(\mathcal{C})$ lorsque x tend vers $+\infty$. (0.5 pt)
c) Tracer $(\mathcal{C})$. (0.5 pt)
4. a) Calculer $\mathcal{A}_\lambda$. (0.25 pt)
b) En déduire la limite de $\mathcal{A}_\lambda$ lorsque x tend vers $+\infty$. (0.5 pt)
5. On se propose de résoudre l'équation (E) .
a) On admet qu'il existe une fonction affine g solution de (E) .
On pose pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$. Calculer alors a et b . (0.5 pt)
b) Soit h une fonction numérique de la variable réelle x deux fois dérivable.
Démontrer que h est solution de (E) si, et seulement si, $h - g$ est solution de (E') . (0.5 pt)
c) Résoudre (E') . (0.5 pt)
d) En déduire l'ensemble des solutions de (E) . (0.25 pt)
e) Démontrer que la fonction f est la solution de (E) vérifiant $f(1) = 2$ et $f'(1) = 4$. (0.5 pt)