LYCEE DE TSINTSUET — TERMINALE C
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES — DUREE : 4 Heures
Année scolaire 2018/2019 — Coefficient 6

L'épreuve comporte trois exercices et un problème à deux parties indépendantes. La qualité de la rédaction et le soin apportés au tracé des figures seront pris en compte dans l'application de la copie du candidat

EVALUATION DE MATHEMATIQUES SEQUENCE N° 4

EXERCICE 1 [4 POINTS]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. (Unité graphique : 1cm). On note A, B et C les points d'affixes respectives $2i, -1+4i$ et $5+2i$. On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = toS$. On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par f.

1- *Calculer les affixes de A' et B', puis placer les points A, B, C, A' et B' dans le repère* 0,75pt
2- *On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\bar{z} + b$ où $a, b \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$. A tout point $M(z)$, f associe le point $M'(z')$.*
   a) *Justifier que f est un antidéplacement* 0,25pt
   b) *Démontrer que $z' = \frac{-3-4i}{5}\bar{z} + \frac{38-6i}{5}$* 0,5pt
   c) *Déterminer l'ensemble des points invariants par f* 0,5pt
   d) *La transformation f est-elle une symétrie orthogonale ?* 0,5pt
3- *Soit le point $D(3+6i)$, (Δ) la médiatrice de $[BD]$ et S' la symétrie d'axe (Δ).*
   a) *Montrer que les droites (Δ) et (AB) sont parallèles ; puis déterminer SoS'* 0,75pt
   b) *Montrer que foS' est une translation notée t' de vecteur $\overrightarrow{DC}$; et en déduire l'expression de f en fonction de t' et S'.* 0,75pt

EXERCICE 2 [3 POINTS]

I- *Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ le système suivant :* $\begin{cases} xy = 1 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$ 1pt
II- *Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 235 par -17* 0,5pt
III- *Déterminer le chiffre des unités de 7^{777}* 0,75pt
IV- *Déterminer l'entier naturel a tel que le nombre 136 dans e système décimal s'écrit aussi $\overline{253}^a$* 0,75pt

EXERCICE 3 [2,5 POINTS]

: *$ABCDEFGH$ est un cube d'arrêt de longueur 3cm. On considère le repère orthonormé $(D,\vec{i},\vec{j}\,\vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$; $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$. On désigne par L le barycentre des points pondérés $(C;2)$ et $(E;1)$. Soit M un point de la droite (AE) et N un point de la droite (DL) tels que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$, a et b étant deux nombres réels.*

1- *Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si a et b vérifient le système :* $\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$ 1pt
2- *a) En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) dont on précisera les coordonnées tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).* 0,75pt

b) Calculer la distance M_0N_0. 0,75pt

PROBLEME [10,5 POINTS]

Partie A/ f_a est une fonction définie pour tout $x \neq 0$ par $f_a(x) = xa^{1-\frac{1}{x}}$, $a > 0$ et $a \neq 0$.

1- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, f_a est solution de l'équation différentielle : $x^2y' - y\ln a = x^2a^{\frac{x-1}{x}}$ 0,5pt

2- On désigne par C_a la courbe de f_a dans un repère orthonormé (O,I,J)

a) Déterminer les coordonnées du point M_a de C_a en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. 0,5pt

b) En déduire l'ensemble (S) des points M_a lorsque a varie dans $\mathbb{R}^* - \{1\}$. 0,5pt

c) Construire (S). 1pt

3- Déterminer l'aire $A(m)$ de la surface bornée par les droites (Ox), (Oy), l'ensemble (S) et la droite d'équation $x = m$, où $m > 0$. Puis déterminer la limite de $A(m)$ en $+\infty$. 1pt

Partie B/



A- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$.

1- Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f 1pt

2- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation 1pt

3- Construire la courbe de f dans un repère orthonormé. On prendra comme unité sur les axes : 3cm 1pt

4- Soit a un réel supérieur à 1.

a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $A = \int_1^a \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)dx$ 0,75pt

b) Déterminer en fonction de a, l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$ 0,25pt

B- Dans cette partie, m désigne un réel strictement positif.

1- Montrer que l'on a : $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$ 0,5pt

2- Démontrer que $\int_m^{m+1} \frac{dx}{x} = \frac{1}{m} - f(m)$ 0,5pt

3- En déduire que l'on a : $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$ 0,25pt

C- Etude la convergence de la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \ldots + \frac{1}{2n}$

1- Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout x différent de 0 et -1, on ait : $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ 0,25pt

2- Soit n, un entier naturel non nul. On pose $s_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}$.

a) En utilisant la question précédente, simplifier l'expression de s_n 0,5pt

b) Déterminer la limite de la suite (s_n). 0,25pt

3- a) Montrer que l'on a : $0 \leq f(n) + f(n+1) + \cdots \ldots + f(2n) \leq s_n$ 0,25pt

b) En déduire la limite de $A_n = f(n) + f(n+1) + \cdots \ldots + f(2n)$ en $+\infty$ 0,25pt

4- a) Justifier que $f(n) + f(n+1) + \cdots \ldots + f(2n) = u_n - \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$ 0,25pt

b) En déduire u_n est convergente et préciser sa limite 0,25pt

Le monde est écrit en langage Mathématique pour comprendre le monde il faut comprendre les Mathématiques https://t.me/KamerHighSchool