LYCEE TECHNIQUE D'EDEA					
Examen	**Epreuve**	**Coef.**	**Durée**	**Classe**	**Année Scolaire**
Evaluation 1	**Mathématiques**	**3**	**3h**	**T^{le} F$_4$**	**2022/2023**

EXERCICE 1 : 4,5 Points

Soient (U_n) et (V_n) les suites définies par : $\begin{cases} U_0 = 1500 \\ U_{n+1} = 0{,}9U_n + 100 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
et $V_n = U_n - 1000$.

1. Calculer U_1 et U_2. **0,5pt**

2. Démontrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **1pt**

3. Exprimer V_n en fonction de n, puis en déduire que $U_n = 500 \times (0{,}9)^n + 1000$. **1pt**

4. Calculer en fonction de n la somme $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_{n-1} + U_n$. **1pt**

5. Au 1er Janvier de l'année 2014, une société de transport de marchandises opérant dans la zone CEMAC dispose d'un stock de $1500\ m^3$ de carburant. D'après les résultats d'une étude, $10\ \%$ du stock de carburant est utilisé au cours de chaque année. Pour ajuster son stock à ses besoins, la société achète $100\ m^3$ de carburant le 1er Janvier de chaque année suivante.
Calculer le stock $(\text{en } m^3)$ de carburant de cette société au 1er Janvier de l'année 2022 après l'achat de $100\ m^3$ de carburant. **1pt**
(Donner l'arrondi du résultat a l'entier près).

EXERCICE 2 : 5,5 Points

On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :
$P(z) = z^3 - (6+8i)z^2 + (-9+38i)z + 40 - 30i$.

1. Montrer que P admet une racine imaginaire pure z_0 à déterminer. **0,75pt**

2. Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $P(z) = (z - 5i)(z^2 + az + b)$. **0,75pt**

3. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $w = 3 + 4i$. **1pt**

4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (6+3i)z + 6 + 8i = 0$. **0,75pt**

5. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$. **0,5pt**

6. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On donne les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 5i$, $z_B = 2 + i$ et $z_C = 4 + 2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère ci-dessus. **0,75pt**

b) Ecrire sous forme algébrique le quotient $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. **0,75pt**

t.me/KamerHighSchool

c) En déduire la nature exacte du triangle ABC. **0,25pt**

EXERCICE 3 : 6,5 Points

I. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère les points A et B de coordonnées respectives $(0\ ;\ -3)$ et $(-1\ ;\ 2)$. A tout point $M(x; y)$ différent de B et d'affixe z, on associe le point $M'(x';\ y')$ d'affixe $z' = \dfrac{z+3i}{z+1-2i}$.

1. Montrer que : $x' = \dfrac{x^2+y^2+x+y-6}{(x+1)^2+(y-2)^2}$ et $y' = \dfrac{5x+y+3}{(x+1)^2+(y-2)^2}$. **1,5pt**

2. Déterminer l'ensemble (Γ) des points M du plan tels z' soit imaginaire pur. **1pt**

3. Déterminer l'ensemble (Φ) des points M du plan tels z' soit un réel. **0,5pt**

4. Déterminer l'ensemble (Π) des points M du plan tels $|z'| = 1$. **0,5pt**

II. Linéariser $\sin^3 2x \cos^2 3x$. **1pt**

III. On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3 = 11 - 2i$.

a) Déterminer les racines cubiques de l'unité. **0,75pt**

b) Calculer $(-1+2i)^3$ et donner le résultat sous forme algébrique. **0,5pt**

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). **0,75pt**

EXERCICE 4 : 3,5 Points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soit (S) l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :
$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z + 1 = 0$.

1. Montrer que (S) est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R. **0,75pt**

2. Vérifier que le point $A(-1; 0; 2)$ appartient à (S), puis déterminer une équation du plan (P) tangent à (S) en A. **0,75pt**

3. Soit (Q) le plan d'équation $z = 2$.

a) Calculer la distance du point Ω au plan (Q). **0,5pt**

b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Ω sur le plan (Q). **0,75pt**

c) Montrer que l'intersection de (S) et (Q) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. **0,75pt**