ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE 1 : [5 points]

1. Soit $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ un polynôme.
   (a) Vérifier que 1 est une racine de $P(x)$ **[0.5 pt]**
   (b) Déterminer deux réels a et b tels que $P(x) = (x-1)(x^2+ax+b)$ **[1 pt]**
   (c) Résoudre l'équation $(E) : x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ **[1 pt]**
   (d) Résoudre l'inéquation $(I) : x^3 + 3x^2 - x - 3 < 0$ **[1 pt]**
2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant (S) : $\begin{cases} -\dfrac{5}{x} - 2y^2 = -11 \\ \dfrac{2}{x} + y^2 = 6 \end{cases}$ **[1.5 pt]**

EXERCICE 2 : [5 points]

1. Déterminer en justifiant clairement les limites suivantes :
   a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x})$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ **[1.5 pt]**
2. Dans chacun des cas calculer la dérivée f' de f :
   a) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+7}{x-1}$ b) $f(x) = (2x+4)^3$ **[1.5 pt]**
3. Soit la fonction f définie sur $]-\infty;2[$ par : $f(x) = \dfrac{-x^3+4x^2-4x+1}{(x-2)^2}$
   (a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty;2[$, $f(x) = -x + \dfrac{1}{(x-2)^2}$ **[0.5 pt]**
   (b) En déduire la primitive F de f qui prend la valeur 0 en 1. **[1.5 pt]**

PROBLÈME : [10 points]

On donne le Tableau de variation d'une fonction f et (C_f) sa courbe représentative.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	‖	↘	6	↗	$+\infty$

1. En utilisant le tableau de variation donner le D_f **[0.5 pt]**
2. En utilisant le tableau de variation déterminer les limites aux bornes du D_f et l'équation d'une asymptote (d) à (C_f). **[1.5 pt]**
3. Déterminer à l'aide du tableau de variation les réels $f(1)$, $f(2)$ et $f'(1)$ puis en déduire les réels a, b et c tels que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-3}$ **[3 pts]**
4. Montrer que la droite $(d') : y = 2x + 1$ est Asymptote oblique à (C_f) **[1 pt]**
5. Étudier les positions relatives de (C_f) par rapport à (d')
6. Montrer que le point $\Omega(\frac{3}{2};4)$ est le centre de symétrie de (C_f). **[1 pt]**
7. Construire (d), (d') et (C_f) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. **[2 pts]**
8. En déduire le tracé de la courbe de la fonction g définie par : $g(x) = |f(x)|$ **[1 pt]**