MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
DELEGATION RÉGIONALE DU CENTRE
LYCÉE DE NKOLNDA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

ANNÉE SCOLAIRE 2019-2020
CLASSE : T^{le} **D COEF :** 4
EVALUATION N^o2 **DURÉE :** 4 H
EXAMINATEUR : M. LUTHER MANN

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

NB : ***La clarté de la copie et la précision dans la redaction seront prises en compte.***

Exercice 1 (03.5 points)

1. Calculer les limites suivantes : **2pts**

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4\sin x+3}{x-1}$; (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{x^2-1})$; (c) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$; (d) $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{\frac{x^2-x+2}{x^2+x}}$

2. On considère la fonction g définie par $g(x)=\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g. **0.5pt**

   (b) Montrer que la fonction g admet un prolongement par continuité g_1 en $x_0=2$ que l'on définira. **1pt**

Exercice 2 (03 points)

Soit la fonction h définie par : $h(x)=x^3+6x^2+9x+3$ et $I=[-4;1]$.

1. Etudier les variations de h, puis dresser le tableau de variation de h sur I. **0.75pt**
2. Justifier que h est continue sur I. **0.25pt**
3. Dénombrer les solutions de l'équation $h(x)=2$ sur I. **1.25pt**
4. Montrer que l'équation $h(x)=4$ admet une unique solution $\gamma\in[-1;1]$. **0.75pt**

Exercice 3 (02.5 points)

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$.

1. Etudier les variations de f. **0.5pt**
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante. **0.75pt**

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0\leq u_n<2$; **0.75pt**

   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente. **0.5pt**

t.me/KamerHighSchool

©3ML/LYCÉE DE NKOLNDA/NOVEMBRE 2019

Problème (11 points)

Ce problème comporte deux parties indépendantes et obligatoires A et B.

Partie A (06.5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation $(E) : z^3 + (-4\sqrt{3}+8i)z^2 + (16-32\sqrt{3}i)z + 128i = 0$.
   (a) Montrer que $-8i$ est solution de (E). **0.5pt**
   (b) Déterminer a et b tels que : **0.5pt**
   $z^3 + (-4\sqrt{3}+8i)z^2 + (16-32\sqrt{3}i)z + 128i = (z+8i)(z^2+az+b)$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0.75pt**
2. Soient A, B et C les points d'affixes $z_A = 2\sqrt{3}-2i$, $z_B = 2\sqrt{3}+2i$ et $z_C = -8i$.
   Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme C en un point D.
   Soit h l'homothétie de centre O qui transforme B en D.
   (a) Montrer que OAB est un triangle équilatéral. **0.5pt**
   (b) Montrer que l'affixe du point D est $z_D = 4\sqrt{3}+4i$. **0.5pt**
   (c) Montrer que OAD est un triangle rectangle. **0.5pt**
   (d) Déterminer l'écriture complexe de l'homothétie h. **0.5pt**
3. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme B en A.
   (a) Démontrer que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3}i)z - 8i$. **1pt**
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S. **0.5pt**
   (c) Soit $M(x,y)$ un point du plan et $M'(x',y')$ son image par S.
      i. Déterminer l'expression analytique de S. **0.5pt**
      ii. Déterminer l'image (D') par S de la droite $(D) : x-2y+1=0$. **0.75pt**

Partie B (04.5 points)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5 = 1$. **0.75pt**
2. On rappelle que : $\cos\frac{8\pi}{5} = \cos\frac{2\pi}{5}$, $\sin\frac{8\pi}{5} = -\sin\frac{2\pi}{5}$, $\cos\frac{6\pi}{5} = \cos\frac{4\pi}{5}$, $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{4\pi}{5}$.
   On pose $z_0 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$, $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.
   (a) Calculer z_0^5, puis déduire que $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$. **0.75pt**
   (b) Montrer que $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$. **0.75pt**
   (c) Déduire que α et β sont les solutions de l'équation $(E) : x^2 + x - 1 = 0$, puis déterminer leurs valeurs exactes ($\alpha > 0$ et $\beta < 0$). **0.75pt**
   (d) En utilisant les relations trigonométrique ci-dessus, montrer que $\alpha = 2\cos\frac{8\pi}{5}$ et $\beta = 2\cos\frac{6\pi}{5}$. **1pt**
   (e) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{8\pi}{5}$ et $\cos\frac{6\pi}{5}$. **0.5pt**

t.me/KamerHighSchool

©3ML/LYCÉE DE NKOLNDA/NOVEMBRE 2019