MINESEC **Année scolaire : 2012-2013**
Lycée de Nkolnda–Nsimalen **Classe : T^{le} D** **Durée : 4 heures**
Département de Mathématiques **Séquence II** **Date : 21/11/ 2012**
Coefficient : 04

Épreuve de Mathématiques

Enseignant : **Romaric TCHAPNGA (PLEG)**

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE I — 4,5 points

1. Calculer les limites suivantes : **1,5 pt**

$a) -\ \lim\limits_{x\longmapsto+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-2x\right)$; b) - $\lim\limits_{x\longmapsto+\infty}\dfrac{-x+3\sqrt{x-1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$; c) - $\lim\limits_{x\longmapsto\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que : **1 pt**

$\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{1}{2\sqrt{n+2}}\leq\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

3. On considère la fonction h : $x\longmapsto \mathrm{h}(x)=2x^3+3x^2+1$.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$. **0,75 pt**

b. Montrer que l'équation $\mathrm{h}(x)=0$ admet une unique solution α qui appartient à l'intervalle $[-2;-1]$. **0,75 pt**

c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de la solution α. **0,5 pt**

EXERCICE II — 4 points

1. Calculer la fonction dérivée des fonctions suivantes : **1 pt**

$a) -\ \mathrm{f}: x\longmapsto \mathrm{f}(x)=-x^2+\sqrt{x^2+1}$; $b) -\ \mathrm{g}:\ x\longmapsto \mathrm{g}(x)\ =\ (-x+1)^2\left(3x^2+1\right)^3$.

2. Soit u : $x\longmapsto\sqrt{x^2-2x}$. Etudier les branches infinies de la fonction u à $-\infty$ et à $+\infty$. **1,5 pt**

3. Calculer les intégrales suivantes : **1,5 pts**

$A=\displaystyle\int_2^5\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$, $B=\displaystyle\int_0^1(x-1)\sqrt{x^2-2x+4}dx$ et $C=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}}x\sin 2x dx$.

EXERCICE III — 2 points

On considère la fontion h : $x\longmapsto \mathrm{h}(x)=\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}$.

1. Determiner l'ensemble de définition de la fonction h. **0,5 pt**

2. Montrer que la fonction h est prolongeable par continuité en 2. **0,75 pt**

3. En déduire une fonction g, prolongement par continuité de h en 2. **0,75 pt**

PROBLEME **9,5 points**

Le problème comporte deux parties indépendantes A et B.

Partie A **5,5 points**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + \frac{1}{x-1} \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 2x^2 - 2x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormée $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f. **0,5 pt**

2. **a.** Etudier la continuité de la fonction f en 0. **0,75 pt**

b. Etudier la dérivabilité de la fonction f en 0. **0,75 pt**

c. Ecrire les équations des démi-tangentes à (C) au point d'abscisse 0. **0,5 pt**

d. Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique (D) à $-\infty$. **0,75 pt**

3. g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x + \dfrac{1}{x-1}$. Montrer que le point $\Omega(1;2)$ est le centre de symétrie de la courbe de la fonction g. **0,75 pt**

4. Dresser le tableau des variations de la fonction f. **0,75 pt**

5. Sur la même figure tracer la courbe (C_f), la droite (D) et les démi-tangentes au point d'abscisse 0. **0,75 pt**

Partie B **4 points**

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 9$ et pour tout n, $U_{n+1} = \dfrac{8U_n - 6}{U_n + 1}$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$. **0,5 pt**

2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante. **0,5 pt**

3. Endéduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite. **0,5 pt**

4. Soit (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{U_n - 6}{U_n - 1}$.

a. Montrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser son premier terme. **0,75 pt**

b. Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n. **1 pt**

c. Etudier la convergence de la suite (U_n). **0,25 pt**

d. Exprimer $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ en fonction de n puis calculer $\lim S_n$. **0,5 pt**