Ministère des Enseignements Secondaires **Année scolaire 2019-2020**
Lycée de Mokong **$4^{\text{ème}}$ évaluation**
Département de mathématiques **Durée : 4h, Coefficient :4**
Classe : $T^{le}D$

Épreuve de Mathématiques

L'épreuve est sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

Exercice 1 (05 points)

I. On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solution de (E) . **(0,5pt)**
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.
   (a) Ecrire le nombre complexe z_0 sous la forme exponentielle. **(0,25pt)**
   (b) Vérifier que z_0 est solution de (E). **(0,25pt)**
   (c) Déduire les trois autres solutions de (E). **(0,5pt)**

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité graphique est $3cm$ pour chaque axe). Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectifs : $z_A = 1 + i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = -1 - i$ et $z_D = 1 - i$.

Soit r la rotation du plan de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

On désigne par E l'image du point B par r et F celle du point A par r.

1. Déterminer l'écriture complexe de r. **(0,5pt)**
2. a) Démontrer que l'affixe z_E du point E est égal à $-\sqrt{2}$. **(0,5pt)**
   b) Déterminer l'affixe z_F du point F. **(0,5pt)**
   c) Placer les points A, B, C, D, E et F dans le repère. **(0,5pt)**
3. Soit S la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z = x + iy$ associe le point M' d'affixe $z' = x' + iy'$ tel que : $z' = (1 - i)z + (1 - \sqrt{2})i$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristique de S. **(0,75pt)**
   b) On pose $G = bar\{(A, |z_A|); (B, |z_B|); (E, |z_E|); (F, |F|)\}$. Donner sous forme algébrique l'affixe du point G', image de G par S. **(0,75pt)**

Exercice 2 (04 points)

Pour tout entier naturel n strictement positif, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{3 + x}dx$ et $I_0 = \int_0^1 \sqrt{3 + x}dx$

1. **a)** Calculer I_0. (0,5pt)
   b) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties . (0,5pt)
2. Comparer x^{n+1} et x^n lorsque $0 \leq x \leq 1$, puis en déduire le sens de variation de la suite (I_n). (0,5pt)

3. **a)** En procédant par encadrement, établir que : $\frac{\sqrt{3}}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$ (0,5pt)
   b) En déduire la limite de la suite (I_n) en $+\infty$. (0,25pt)
4. **a)** Démontrer que pour tout nombre $x \in [0;1]$ on a :
   $0 \leq 2 - \sqrt{3+x} \leq \frac{1}{2+\sqrt{3}}(1-x)$. (0,75pt)
   b) Déduire du résultat précédent que : $\frac{2}{n+1} - \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1}$. (0,75pt)
   c) Déterminer la limite de nI_n lorque n tend vers $+\infty$. (0,25pt)

Problème (11 points)

Le problème comporte trois parties A, B et C. On considère la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = -x + 2 + xe^{1-x}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ;I,J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire (03 points)
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -1 + (1-x)e^{1-x}$.

1. **a)** Justifier que la limite de g en $+\infty$ est -1. **(0,25pt)**
   b) Déterminer la limite de g en $-\infty$ **(0,25pt)**
2. **a)** Démontrer que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x-2)e^{1-x}$. **(0,5pt)**
   b) Etudier les variation de g et dresser son tableau de variation. **(0,75pt)**
3. **a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**
   b) Justifier que $0,4 < \alpha < 0,5$ **(0,25pt)**
   c) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**

Partie B : Etude de la fonction f (06,5 points)

1. Calculer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. **(0,5pt)**
2. **a)** Démontrer que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$. **(0,5pt)**
   b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. **(1pt)**
3. **a)** Etudier les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. **(0,75pt)**
   b) Étudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$,
   où $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation $y = -x + 2$. **(0,75pt)**
4. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 1. **(0,5pt)**
5. Démontrer que : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$. **(0,5pt)**
6. **a)** Justifier que pour tout nombre réel x, $\frac{f(-x+2)}{f(x)} = e^{x-1}$ **(0,5pt)**
   b)On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions. On appelle β l'une de ces solutions, démontrer que $2 - \beta$ est l'autre solution. **(0,5pt)**
7. Construire soigneusement $(\mathcal{C})$,$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T})$ dans un même repère. (on prendra $\alpha = 0,4$ et $\beta = 2,5$). On rappelle que l'unité graphique est $2cm$. **(1pt)**

Partie C : Calcul d'aire (01,5 point)
Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimité par $(\mathcal{C})$, la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x + 2$, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.

1. Hachurer le domaine qui défini l'aire $\mathcal{A}$. **(0,5pt)**
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2. **(1pt)**