Ministère des Enseignements Secondaires **Année scolaire 2019-2020**
Lycée de Mokong **$4^{\text{ème}}$ évaluation**
Département de mathématiques **Durée : 4h, Coefficient : 5**
Classe : $T^{le}C$

Épreuve de Mathématiques

Exercice 1 (06 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. On donne A et B deux d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}}$. C un point du plan tel que $OACB$ est un losange.

I. On considère la similitude directe $\mathcal{S}$ de centre O qui transforme A en C.

1. Déterminer l'angle et le rapport de $\mathcal{S}$. **(0,5pt)**
2. Déterminer la droite (OC) par $\mathcal{S}$. **(0,5pt)**

II.. Soit ϕ la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que ϕ est une isométrie du plan. **(0,75pt)**
2. On considère la transformation r qui à tout point M_1 d'affixe z_1, associe le point M_1' d'affixe z_1' telle que : $z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Donner la nature et les éléments caractéristiques de r. **(0,5pt)**
3. (a) Donner une méésure de l'angle $(\widehat{\vec{AO};\vec{AB}})$. **(0,5pt)**
   (b) Soit $S_{(AO)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AO). Déterminer la droite (Δ) telle que $r = S_{(\Delta)}\ o\ S_{(AO)}$. **(0,25pt)**
4. Montrer que $\phi = r\ o\ S_{(AO)}$ et en déduire la nature de ϕ. **(0,75pt)**

III. Soit g une application définie de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ par $g(z) = (1+ia)z + (1-ia)\bar{z}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{C}$. **(0,5pt)**
2. On suppose que $a = 1$.
   Déterminer **kerg** et **img**, on précisera à chaque fois une base . **(1,25pt)**

Exercice 2 (04 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. (a) Montrer que les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles. . **(0,5pt)**
   (b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite (D) intersection de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$. **(0,5pt)**
   (c) On considère le cône de revolution (Γ) d'axe (Ox) contenant la droite (D) comme génératrice. Montrer que les coordonnées (x,y,z) de tout point M de la génératrice (D) vérifient l'équation : $7x^2 = y^2 + z^2$. **(0,25pt)**
2. On suppose que (Γ) a pour équation $7x^2 - y^2 - z^2 = 0$. Soit a un nombre réel, $(\mathcal{Q})$ le plan d'équation : $x = a$.
   Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma) \cap (\mathcal{Q})$. **(0,75pt)**

3. (a) Montrer que l'équation $x^2 = 3[7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution. **(0,5pt)**

   (b) Soient a et b deux entiers relatifs. Montrer que si 7 divise $a^2 + b^2$, alors 7 divise a et 7 divise b. **(1pt)**

4. Soient a, b et c trois entiers relatifs non nuls. Montrer que si le point $A(a, b, c)$ est un point du cône (Γ) alors a, b et c sont divisibles par 7. **(0,5pt)**

Problème (10 points)

Le problème comporte deux parties A et B indépendantes et obligatoires. Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J).

Partie A (05,5 points)

Soit a un réel strictement positif.

On se propose de resoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation $(E_a) : a^x = x^a$. Pour cela, on considère la fonction f_a telle que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f_a(x) = a^x x^{-a}$.

1. Justifier que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\quad a^x = x^a \ \Leftrightarrow \ f_a(x) = 1$. **(0,25pt)**
2. On suppose que $a = e$.
   (a) Dresser le tableau de variation de f_a. **(1pt)**
   (b) Déduire que pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\frac{x}{\ln x} \geq e$. **(0,5pt)**
3. On suppose que $0 < a < 1$
   (a) Dresser le tableau de variation de f_a. **(1pt)**
   (b) Montrer que l'équation (E_a) une unique solution que l'on déterminera. **(0,5pt)**
4. On suppose que a est strictement positif et $a \neq e$
   (a) Dresser le tableau de variation de f_a. **(1pt)**
   (b) Déduire des questions $2 - b)$ et $4 - a)$ que la fonction admet un minimum absolu strictement inférieur à 1. **(0,75pt)**
5. En déduire que l'équation (E_a) admet exactement deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < \frac{a}{\ln a} < x_2$. **(0,5pt)**

Partie B (04,5 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x + 1)dx$.

1. (a) Démontrer que $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. **(0,5pt)**
   (b) Etudier la convergence de la suite (U_n). **(0,5pt)**
   (c) Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}$. **(0,5pt)**
   (d) Montrer que $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}$. **(0,5pt)**
   (e) Déduire la valeur de U_1. **(0,5pt)**
2. Pour tout $x \in [0; 1]$ et ppour tout $n \geq 2$, on pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n$.
   (a) Démontrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$. **(0,5pt)**
   (b) Montrer que : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$. **(0,5pt)**
   (c) Justifier que : $U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}[\ln 2 - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^n}{n+1})]$. **(0,5pt)**
   (d) En déduire la valeur exacte de U_2. **(0,5pt)**