



Épreuve De Mathématiques

L'épreuve comporte sur deux pages, deux exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et le soin apporté aux tracés des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat. Soyez précis et propre.

Exercice 1 [6,5 points]

1. On donne l'expression analytique de la transformation **S** suivante :
$$\begin{cases} x' = x + y\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ y' = -x\sqrt{3} + y + \sqrt{3} \end{cases}$$
 - (a) Déterminer l'écriture complexe de la transformation **S**. **0,75pt**
 - (b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de **S**. **0,75pt**
 - (c) Déterminer l'image par **S** du cercle de centre $A(-1; 2)$ et de rayon $r = 3\text{cm}$. **0,5pt**
2. Soit f l'application, qui à tout nombre complexe $z \neq -2i$, associe $f(z) = \frac{z - 2 + i}{z + 2i}$.
 - (a) Sachant que $z = x + iy$, déterminer $X, Y \in \mathbb{R}$ tels que : $f(z) = X + iY$. **0,75pt**
 - (b) Déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
 - i. $f(z)$ soit un imaginaire pur. **0,5pt**
 - ii. $f(z)$ soit un réel. **0,5pt**
 - iii. $|f(z)| = 1$. **0,5pt**
3. Sachant que $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, linéariser $f(x) = \sin^4 x$ et déduire la primitive de f qui s'annule en 0. **0,75pt**
4. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $(\Sigma) : \begin{cases} 2x + 4y + z = 14 \\ x + y + z = 12 \\ 3x + y + 2z = 14 \end{cases}$. **0,75pt**
 - (b) Déduire les réels positifs x, y et z tels que : $\begin{cases} \ln(x^2 y^4 z) = 14 \\ \ln(xyz) = 12 \\ \ln(x^3 y z^2) = 14 \end{cases}$. **0,75pt**

Exercice 2 [4,5 points]

1. On considère la fonction f_{ab} définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_{ab}(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
 - (a) Calculer $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$. **0,75pt**
 - (b) Vérifier que $f_{a,b}(x) = \frac{1}{9}[(8a + 6b) \sin x - f''_{a,b}(x)]$. **0,5pt**
 - (c) En déduire une expression générale des primitives de la fonction $f_{a,b}$. **0,5pt**
2. (a) Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{(U_n)^2}{2U_n - 1}$. Calculer U_1 et U_2 .

- (b) Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \ln\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right)$.
- Calculer V_0 , V_1 et V_2 . **0,75pt**
 - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2. **0,75pt**
 - Exprimer (V_n) en fonction de n . **0,25pt**
 - Montrer que $U_n = \frac{1}{1 - e^{V_n}}$; déduire l'expression de (U_n) en fonction de n . **0,5pt**
 - Soit la somme $S_n = e^{V_0+V_1+V_2+\dots+V_{n-1}}$. Montrer que $S_n = 2^{1-2^n}$. **0,5pt**

Problème [9 points]



Partie A [6 points]

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (1 - \frac{1}{x})(\ln x - 2)$ et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé.

- On considère la fonction u définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.
 - Étudier les variations de u et dresser son tableau de variation. **0,75pt**
 - Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0; +\infty[$. **0,5pt**
 - Donner un encadrement de α à 10^{-2} près et montrer que $\ln \alpha = -\alpha + 3$. **1pt**
 - Déduire le signe de u suivant les valeurs de x . **0,5pt**
- Étude et tracé de la fonction f
 - déterminer les limites de f quand x tend vers 0 et $+\infty$. **0,5pt**
 - Calculer la dérivée f' de f et montrer que de f' et u ont le même signe. **0,75pt**
 - Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$ et dresser le tableau de variation de f . **0,5pt**
 - En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près. **0,5pt**
 - Étudier les branches infinies à la courbe représentative de f . **0,25pt**
 - Représenter $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f . **0,75pt**

Partie B [3 points]

On considère dans $\mathbb{R}$, la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - \ln(u_n) \end{cases}$.

- Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 3 - \ln x$.
 - Démontrer que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$. **0,25pt**
 - On considère l'intervalle $I = [2; 3]$.
 - Calculer $g'(x)$ et montrer que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **0,5pt**
 - Démontrer que $\forall x \in I, g(x) \in I$. **0,5pt**
 - Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$. **0,5pt**
 - Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$. **0,5pt**
 - En déduire la limite de la suite (u_n) . **0,25pt**
 - Déterminer, le plus petit entier naturel p tel que $|u_p - \alpha| \leq 10^{-5}$. **0,5pt**