| République du Cameroun | Paix-Travail-Patrie | MINESEC |
|---|---|---|
| Année scolaire : 2019 - 2020 | Lycée de MEYILA | Département de Mathématiques |

# Evaluation N° 4 : Épreuve de Mathématiques

| Classe : Terminale D | Durée : 04 heures | Coefficient : 04 | Examinateur : Hilaire TOUYEM |
|---|---|---|---|

**Consignes :**
*Répondez clairement aux questions qui vous sont posées. La qualité de la rédaction, la clarté dans le raisonnement et la présentation de la copie seront prises en compte par le correcteur lors de l'évaluation de la copie du candidat.*

## Exercice 1 ..... [5 points]

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel non nul par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n}u_n$.

(1) Calculer $u_2$, $u_3$ et $u_4$. **[0.75 pt]**

(2) (a) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul $n$, $u_n > 0$. **[0.75 pt]**

(b) Démontrer que la suite $(u_n)$ est décroissante. **[0.75 pt]**

(c) Que peut on dire de la convergence de cette suite ? Justifier votre réponse. **[0.5 pt]**

(3) Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $v_n = \frac{u_n}{n}$.

(a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme. **[0.75 pt]**

(b) Pour entier naturel non nul $n$, en déduire l'expression de $v_n$ et de $u_n$. **[0.5 pt]**

(4) Soit $h$ la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $h(x) = \ln x - x \ln 2$.

(a) Déterminer la limite de $h$ en $+\infty$. **[0.5 pt]**

(b) En déduire la limite de la suite $(u_n)$. **[0.5 pt]**

## Exercice 2 ..... [ 3.5points]

**I-)** Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $2i$, $1$ et $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soir $R$ la transformation du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que $z' = e^{\frac{i\pi}{3}}z$.

(1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R$. **[0.75 pt]**

(2) Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ telle que $|z - 2i| = 2$.

(a) Déterminer et construire $(\Gamma)$. **[0.5 pt]**

(b) Déterminer et construire l'image $(\Gamma')$ de $(\Gamma)$ par $R$. **[0.5 pt]**

(3) Soit $(D)$ l'enemble des points $M$ d'affixe $z$ telle que $|z - 1| = \left|z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|$.

(a) Déterminer et construire $(D)$. **[0.5 pt]**

(b) Déterminer et construire l'image $(D')$ de $(\Gamma)$ par $R$. **[0.5 pt]**

**II-)** Une urne contient $4$ jettons marqués $1$, $2$, $3$ et $4$. On tire au hasard un jetton dans l'urne, on note $P_i$ la probabilité de tirer le jetton marqué $i$. On suppose que $P_1$, $P_2$, $P_3$ et $P_4$ constituent dans cet ordre une progression arithmétique de raison $\frac{1}{8}$

(1) Montrer que $P_1 = \frac{1}{16}$. **[0.5 pt]**

(2) En déduire $P_i$, pour $i \geq 2$. **[0.75 pt]**

t.me/KamerHighSchool

## Problème ..... [11 points]

Ce problème comporte deux parties dépendantes.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x - 2e^x + 2$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

## Partie A ..... [6.5 points]

(1) (a) Calculer la limite de $f$ en $-\infty$ et donner une interprétation graphique. **[0.5 pt]**

(b) Calculer la limite de $f$ en $+\infty$. **[0.25 pts]**

(c) Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ et donner une interprétation graphique. **[0.5 pt]**

(2) (a) Etudier les variations de $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation. **[1.25 pts]**

(3) (a) Déterminer le signe de $f\left(\frac{3}{2}\right)$ et en déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$. **[1 pt]**

(b) En déduire le signe de $f$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. **[0.5 pt]**

(c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_0^2 xe^x dx$. **[0.5 pt]**

(d) En déduire l'aire du domaine délimitée par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$. **[0.5 pt]**

(4) Tracer la courbe $\mathcal{C}$. **[1.5 pts]**

## Partie B ..... [3.5 points]

Soit la fonction $g$ définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2(1 - e^{-x})$. On pose $I = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

(1) Montrer que $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$. **[0.5 pt]**

(2) Montrer que, pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$. **[0.5 pt]**

(3) Montrer que pour tout $x \in I$, $g(x) \in I$. **[0.5 pt]**

(4) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n)\,, n \geq 1\,. \end{cases}$$




(a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_n \in I$. **[0.5 pt]**

(b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : **[0.5 pt]**

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|\,.$$

(c) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$. **[0.25 pt]**

(5) En déduire que la suite $(u_n)$ converge et donner sa limite. **[0.25 pt]**

(6) Déterminer le plus petit entier $p$ tel que $u_p$ soit une valeur approchée à $10^{-3}$ près réel $\alpha$. Donner alors une valeur approchée de $\alpha$ à trois décimales. **[0.5 pt]**

***« Après le pain, l'éducation est le premier besoin d'un peuple » Affirmait Danton***

t.me/KamerHighSchool