Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée de Maroua Kongola
B.P. 329 Maroua
Département de **Mathématiques**

Année Scolaire 2010/2011
Classe: **T^{le}D**
Coef: **5**; Durée : **4 h**
Prof: M. Loumsia A.

SÉQUENCE N°2 / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / NOVEMBRE 2010

L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.



Exercice 1 [4points]

Soit la fonction numérique $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

1. Préciser l'ensemble de définition Df de f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 1.5pt

2. On considère la fonction $g : x \mapsto (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})\sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})$

a. Justifier que: $\forall x \in Df$, $g(x) = 2\frac{\sin f(x)}{f(x)}$. 0.5pt

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. 0.5pt

c. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\sin(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})\right]$. 1.5pt

Exercice 2 [5points]

1. On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation:

$$(\text{E}): z^3 - (2+3i)z^2 + (4+6i)z - 8 = 0$$

a. Démontrer que (E) admet une solution réelle et une seule. 1pt

b. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$. 1.5pt

c. Soient A, B et C les points images des solutions de (E) dans le plan complexe. Démontrer que A, B et C sont les points d'un cercle dont on précisera le centre. 1.5pt

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - (2+3i)z^4 + (4+6i)z^2 - 8 = 0$. 1pt.

Problème [11points]

Partie A : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) On prend pour unité graphique : 4 cm.

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\mathscr{S} = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation $\mathscr{S}$? Préciser ses éléments caractéristiques. 1pt

b. Montrer que l'écriture complexe de $\mathscr{S}$ est : $z \longmapsto \frac{1+\text{i}}{2}z + 1 - \text{i}$. 1pt

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par $\mathscr{S}$ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \text{i}\,(2 - z')$. 1pt

2. a. Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \text{i}(p - a)$.1pt

t.me/KamerHighSchool

b. En déduire la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω. 0.5pt

Partie B :

1. Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

a. Étudier les variations de u sur $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$. 2.5 pts

b. i. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ +\infty[$. 0.25 pt
On note α cette solution.

ii. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α. 0.5 pt

c. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x. 0.5 pt

d. Montrer l'égalité : $\ln \alpha = 2 - \alpha^2$. 0.25 pt

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.
On note f' la fonction dérivée de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Exprimer, pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$. 0.5 pt

b. En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$. 0.25 pt

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction ln (logarithme népérien) ;
- A le point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$;
- M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$. 0.5 pt

b. Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

i. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0\ ;\ +\infty[$. 0.5 pt

ii. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ, noté P, dont on précisera les coordonnées. 0.5 pt

iii. Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$. 0.5 pt

c. *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ? 0.25 pt

t.me/KamerHighSchool