**Ministère des Enseignements Secondaires**
**Lycée de Maroua Kongola**
B.P. 329 Maroua
Département de **Mathématiques**

**Année Scolaire 2009/2010**
Classe : T^le C
Coef : 5 ; Durée : 4 h
**Prof : M. Loumsia A.**

# BACCALAURÉAT BLANC / ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES / MAI 2010

*L'épreuve comporte 2 exercices et un problème. La qualité de la rédaction, la présentation et la clarté des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1 [4.75 pts]

On pose $a = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$ ; $b = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$ ; $c = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

## A)

1. Exprimer $a^6$, $b^6$ et $c^6$ sous forme algébrique. 0.25pt× 3
2. En déduire une solution de l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^6 = -8\mathrm{i}$. 0.25 pt
3. Soit $j = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$
   a. Vérifier que $j^3 = 1$. 0.25pt
   b. Démontrer que $jb$ et $j^2b$ sont aussi solution de (E). 0.5pt
   c. En déduire toutes les solutions de (E). 0.75pt

## B)

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $\begin{cases} x \equiv 0[6] \\ x \equiv 3[4] \end{cases}$
2. Déterminer tous les entiers naturels $n$ vérifiant à la fois les deux propositions suivantes : 1.5 pt
   – $a^n$ est un nombre réel ;
   – $b^n$ est un imaginaire pur.

## Exercice 2 [4.25 pts]

**A)** On considère trois urnes U, V et W contenant chacune des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. La probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est $P_1 = 0.4$ ; celle de tirer 1 de V est $P_2 = 0.5$ et enfin celle de tirer 1 de W est $P_3 = 0.7$.

On tire une boule de U, une boule de V et une autre de W. Soient $a$, $b$ et $c$ les numéros respectifs de ces boules. Soit $(Q)$ le plan d'équation $ax + by + cz + 6 = 0$, et soit (E) la conique d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - (-1)^c\frac{y^2}{b^2} = 1$ Calculer la probabilité pour que :

1. (Q) soit parallèle au plan (P) : $x + 2y + z - 4 = 0$ ; 0.5pt
2. (Q) contienne le point $M(0, -2, -1)$ ; 0.5pt
3. (E) soit une ellipse ; 0.5pt
4. (E) soit une hyperbole équilatère. 0.5pt

**B)** Un jeu consiste à tirer une boule de chaque urne :
– Dans U, une boule n° 1 tirée fait gagner 40 F tandisque la n° 2 fait perdre 60F ;
– Dans V, une boule n° 1 tirée fait gagner 50 F tandisque la n° 2 fait perdre 50F ;
– Dans W, une boule n° 1 tirée fait gagner 70 F tandisque la n° 2 fait perdre 30F.

1. Quels sont les sommes possibles qu'un joueur peut avoir à l'issu de ce jeu ? 0.5pt
2. On appelle $X$ la variable aléatoire réelle donnant la somme eu par un jouer après les tirages.
   a. Définir la loi de probabilité de $X$. 1pt
   b. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$. Le jeu est-il avantageux pour le joueur ? 0.75pt

t.me/KamerHighSchool

**Problème** **[11pts]** *Les parties A, B et C sont indépendantes*

***Partie A :*** $E$ désigne un espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par $f(\vec{i}) = \vec{i}$, $f(\vec{j}) = f(\vec{k}) = \frac{1}{2}(\vec{j} + \vec{k})$ On note $Kerf$ le noyau de $f$ et $Imf$ l'image de $E$ par $f$.

1. Déterminer une base de $Kerf$. 0.5 pt
2. Déterminer une base de $Imf$. 0.5 pt
3. Démontrer que tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de $Kerf$ et d'un vecteur de $Imf$. 0.5 pt

***Partie B :*** Le plan $(\mathscr{P})$ est muni d'un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$). Unité graphique 2cm. Soit $f$ la transformation du plan qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tel que : $\begin{cases} 4x' = x - \sqrt{3}y \\ 4y' = \sqrt{3}x + y \end{cases}$

1. a. Déterminer l'écriture complexe de $f$. 0.5pt

   b. En déduire que $f$ est une similitude directe plane dont on déterminera le centre, le rapport et l'angle. 0.75pt
2. Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan tels que : $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy = 64$ et $(\Gamma')$ son image par $f$.

   a. Déterminer une équation cartésienne de $(\Gamma')$. 0.75pt

   b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma')$. 0.75pt

   c. En déduire que $(\Gamma)$ est une ellipse dont on précisera le centre, les foyers, les sommets et l'excentricité. 0.75pt

   d. Construire $(\Gamma)$ et $(\Gamma')$ dans le plan. 1pt

***Partie C :*** On considère la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

1. Montrer que $f$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier le signe de sa fonction dérivée $f'$, sa limite éventuelle en $+\infty$, et dresser le tableau de ses variations. 1.75pt
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$. 0.5pt

   b. Montrer, sans chercher à calculer $u_n$, que, pour tout entier naturel $n$, $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$. 0.5pt

   c. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite. 0.5pt
3. Soit $F$ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = [\ln(x+3)]^2$.

   a. Justifier la dérivabilité sur $[0\ ;\ +\infty[$ de la fonction $F$ et déterminer, pour tout réel positif $x$, le nombre $F'(x)$. 0.5pt

   b. On pose, pour tout entier naturel $n$, $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer $I_n$. 0.5pt
4. On pose, pour tout entier naturel $n$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$. Calculer $S_n$. La suite $(S_n)$ est-elle convergente ? 0.75pt

t.me/KamerHighSchool