LYCEE DU MANENGOUBA ANNEE SCOLAIRE : 2016-2017
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES SEQUENCE : N°1/DUREE : 02Heures
CLASSES: T^{le}C / COEF:6

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice 1 : 3.5 points

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. Soit z un nombre complexe et M son point image dans le plan complexe, On suppose que $Mes\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{\pi}{7}$, donner la plus petite valeur strictement positive de l'entier naturel n pour laquelle z^n est un réel. 1pt
2. On considère les nombres complexes $A=\frac{2+3i}{1-i}$ et $B=\frac{2+3i}{1-i}+\frac{2-3i}{1+i}$.
   a) Mettre A sous la forme algébrique. 0.75pt
   b) En déduire que B est un nombre réel (On précisera sa valeur). 0.75pt
3. Soit θ un nombre réel tel que $\pi<\theta<2\pi$. Déterminer en fonction de θ le module et un argument du nombre complexe $u=icos\theta+sin\theta$. 1pt

Exercice 2 6.5 points

A. Soit $A,B,C\ et\ m$ quatre entiers relatifs non nuls.

Démontrer que si m divise $AB\ et\ C$ et $PGCD(A,C)=1$ alors m divise B (on pourra se servir du théorème de Bézout) 1pt

B. Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que n et $2n\ +\ 1$ sont premiers entre eux. 0.75pt
2. On pose $\alpha=n\ +\ 3$, $\beta=2n\ +\ 1$, on désigne par δ le PGCD de αet β.

a) Donner les valeurs possibles de δ. 0.75pt

b) Démontrer que : αet β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5. 1pt

3. On considère : $a\ =\ n^3+2n^2\ -3n$ et $b\ =\ 2n^2-n-1$.

Montrer, après factorisation que $(n-1)$ divise $a\ et\ b$ 0.5pt

4. On note $d\ le\ PGCD$ de $n\ (n+3)$ et de $2n+1$.
   a) Montrer que δ divise d, puis que $\delta\ =d$ 1.5pt
   b) En déduire le $PGCD$,Δ, de a et b en fonction de n dans le cas où n est multiple de 5 1pt

Exercice 3 : 10points

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n ,on a :
$\sum_{k=1}^{n}k(n-k)\ (n+k)=\frac{n^2(n-1)(n+1)}{4}$. 1.5pt
2) Déterminer les entiers naturels n tels que le quotient $\frac{2n+1}{n-3}$ soit un nombre premier. 1pt.
3) Déterminer les couples d'entiers naturels $(x;y)$ tels que le nombre $A=\overline{2x3y}$ dans le système décimal soit divisible 28. 1.5pt
4) Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que $\overline{100010001}^b$ est divisible par $\overline{10101}^b$ (on pourra développer $(b^4+b^2+1)(b^4-b^2+1)\ et\ poser\ w=b-1$;on précisera le quotient en base b). 1.5pt
5) a) Démontrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, que 20 et 47 sont premiers entre eux. 1pt

b) En déduire les entiers relatifs u et v tels que $47u+20v=1$. 1pt

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation $47x-20y=3$. 1.5pt

d) Un nombre B a pour reste 2 dans la division euclidienne par 47, a pour reste 5 dans la division euclidienne par 20. Quel est son reste dans la division euclidienne par 940. 1pt