MINESEC	Devoir n°3	Année scolaire 2019/2020
Lycée de Mandoumba	Epreuve de mathématiques	Classe : Tle C
Département de mathématiques		DUREE : 4 h

Instructions :
Lis l'énoncé entièrement avant de répondre aux questions posées. Tu peux traiter les exercices dans l'ordre que tu souhaites. **Le correcteur tiendra en compte ta rédaction. Surtout, évitez les ratures sur votre copie.**

Exercice1 : 4 points

On se place dans l'espace $(\mathcal{E})$ muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v},\vec{w})$. On considère les points $A(1;6;4)$, $B(2;5;3)$, $C(3;1;1)$ et $D(8;1;7)$. On pose $\vec{n} \coloneqq \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

1. a) Déterminer les coordonnées de $\vec{n}$. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés. (0,5pt)
   b) Déterminer l'aire du triangle ABC. (0,25pt)
2. Soit (Δ) la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;3)$.
   a) Démontrer que la droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC). (0,25pt)
   b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC). (0,25pt)
   c) Déterminer une représentation paramétrique du plan (Δ). (0,25pt)
   d) Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC). (0,25pt)
3. On note H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
   a) On pose $\overrightarrow{DH} \coloneqq \alpha\vec{n}$. Calculer le nombre réel α. (0,25pt)
   b) En déduire la distance DH et le volume du tétraèdre ABCD. (0,5pt)
4. Soit (P_1) le plan d'équation $x+y+z-6=0$ et (P_2) le plan d'équation $x+4y-7=0$.
   a) Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants. (0,25pt)
   b) Vérifier que la droite (d), intersection des plans (P_1) et (P_2), a pour représentation paramétrique
   $$\begin{cases} x=-4t-1 \\ y=t+2 \\ z=3t+5 \end{cases}, \text{ où } t\in\mathbb{R}. \quad (0,5pt)$$
   a) La droite (d) et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ? (0,5pt)
1. Considérons l'ensemble $(\mathcal{S})$ des points $M(x;y;z)$ de $(\mathcal{E})$ d'équation $x^2-2x+y^2-4y+z^2-4=0$.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathcal{S})$. (0,75pt)
   b) Caractériser l'intersection de $(\mathcal{S})$ avec le plan (P) d'équation $x+4y-3=0$. (0,5pt)

Exercice2 : (BACC 2018) 4 points

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O ; I, J, K) tels que $OI = OJ = OK = 2cm$. On donne les points $A(2\,;0\,;1)$, $B(3\,;-2\,;0)$ et $C(2\,;8\,;-4)$.

1. Soit un point $M(x,y,z)$.
   Exprimer en fonction de x, y et z, les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$. (0,75pt)
2. Résoudre le système $\begin{cases} -x+y-2z=-4 \\ -x-y-z=-11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases}$. (0,75pt)
   On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie.



3. Démontrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner ses coordonnées. (0,75pt)
4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ représente l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
   a) Le point N étant défini à la question 3.
   Montrer que le volume du tétraèdre NABC est égal à $\frac{1}{6}CN^2$. (0,75pt)
   b) Calculer l'aire du triangle NAB. (0,5pt)
   c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point C au plan NAB. (0,5pt)

Problème : _____ **12 points**

Partie A : Étude de la fonction f : _____ **6 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{|x^2+5x+4|} - \frac{3}{4}x$. On nomme $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ; I, J) avec OI = OJ =2 cm.

1. Vérifier que $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5x+4} - \frac{3}{4}x\ , \text{ si } x \in]-\infty;-4] \cup [-1;+\infty[\\ \sqrt{-x^2-5x-4} - \frac{3}{4}x, \text{ si } x \in [-4;-1] \end{cases}$ (0,5 pt)

2. a) Vérifier que $f(x) = \begin{cases} x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}} - \frac{3}{4}\right)\ , \text{ si } x > -4 \\ x\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}} - \frac{3}{4}\right), \text{ si } x < -1 \end{cases}$ (0,5 pt)

b) Etudier les branches infinies à $(\mathcal{C}_f)$. (1 pt)

3. Etudier la dérivabilité de f en -4 et -1. Interpreter ce resultat.

4. a) Vérifier que $f'(x) = \begin{cases} \frac{x+\frac{5}{2}}{\sqrt{x^2+5x+4}} - \frac{3}{4}\ , \text{ si } x \in]-\infty;-4[\cup]-1;+\infty[\\ \frac{-x-\frac{5}{2}}{\sqrt{-x^2-5x-4}} - \frac{3}{4}, \text{ si } x \in]-4;-1[\end{cases}$ (0,75 pt)

b) Montrer que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]-\infty;-4[\cup]-1;+\infty[$. (0,5 pt)

c) Montrer que le signe de $f'(x)$ sur $]-4;-1[$ est celui du polynôme $25x^2+125x+136$ sous la contrainte $x \leq -\frac{5}{2}$. (0,75 pt)

5. Dresse le tableau de variations de la fonction f. (0,75 pt)

5. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ vers un intervalle K à prèciser. (0,5 pt)

6. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]3;4[$. (0,5 pt)

7. Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et ses asymptotes (Respectez l'échelle : OI=OJ=2cm). (0,75 pt)

Partie B : _____ **6points**

I- On considère le polynôme : $f(z) = z^3 - (13-4i)z^2 + (64-26i)z - 84 + 36i$

1. Montrer que $f(z)$ a une racine réelle. (0,75 pt)
2. Déterminer les nombres complexes a, b, et c tels que $f(z) = (z-2)(az^2+bz+c)$. (0, 75 pt)
3. Déterminer les racines carrées de $-63-16i$. (0,5 pt)
4. En admettant que $f(z) = (z-2)(z^2-(11-4i)z+42-18i)$, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$. (0,5pt)

II- On considére les points L, K, et E d'affixes resprectives 2 ; $5+2i$ et $6-6i$. Soit G le barycentre des points L, K, et E affectés respectivement des poids 1 ; 2 et -1.

1. Déterminer l'affixe de G. (0,5pt)
2. Calculer GL^2. (0,5pt)
3. Sachant que $GK^2 = 13$ et $GE^2 = 130$, en déduire que $ML^2 + 2MK^2 - ME^2 = 2GM^2 - 78$. (0,5pt)
4. Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des points M du plan tels que $ML^2 + 2MK^2 - ME^2 = a$. (0,75pt)

III- 1. Linéariser $\cos^2 x \sin^3 x$. (1,5pt)

2. a) En utilisant d'une part la formule de Moivre et d'autre part le développement usuel de $(a+b)^3$, développer $(\cos x + i \sin x)^3$. (0,75 pt)

b) En déduire, les expressions de $\cos 3x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$. (0,5pt)

