MINISTÈRE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LYCEE JOSS

Année scolaire : 2011-2012
Classe : Terminale C
Séquence No : 4
Coeff : 05 Durée : 4h

Epreuve de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 :/2 pts

1. Soit (P), le plan complexe rapporté à un repère orthogonal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\left|\dfrac{z-1-i}{z+2+2i}\right| = \dfrac{1}{2}$. 1 pt
   (b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $arg\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.
2. Soient A,B, C et D quatre points de l'espace $\mathcal{E}$ orienté. Montrer que A,B, C et D sont coplanaires si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. 0,5 pt

EXERCICE 2 :/2,5 pts

1. Soit x, un nombre réel.
   (a) Montrer que $x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - 4x^2$. 0,25 pt
   (b) En déduire que $x^4 + 4$ est le produit de deux trinômes à coefficients entiers. 0,25 pt
2. Soit n, un entier naturel tel que $n \geq 2$. On considère $A = n^2 - 2n + 2$, $B = n^2 + 2n + 2$ et $d = PGCD(A; B)$
   (a) Montrer que $x^2 + 4$ n'est pas premier. 0,5 pt
   (b) Montrer que tout diviseur de A qui divise n, divise 2. 0,5 pt
   (c) Montrer que tout diviseur commun de A et B divise $4n$. 0,5 pt
   (d) Dans cette question, on suppose que n est impair.
      i. Montrer que A et B sont impairs. 0,25 pt
      ii. En déduire que d est impair. 0,25 pt

EXERCICE 3 :/2,5 pts

Soit ABC un triangle tel que $mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ et $AB < AC$. On désigne par (Γ) le cercle circonscrit au triangle ABC et O, son centre. Soit E, le milieu du segment $[BC]$ et P, le point de $[AC]$ tel que $AB = CP$. La droite (OE) coupe (Γ) en I et J, tels que J et A soient sur le même arc de corde $[BC]$.

1. (a) Faire une figure. 0,5 pt
   (b) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $mes\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$? 0,5 pt
2. (a) Justifier qu'il existe une rotation r telle que $r(A) = P$ et $r(B) = C$. 0,25 pt
   (b) Déterminer la mesure de son angle. 0,25 pt
   (c) Démontrer que son centre est un point de (Γ) que l'on précisera. 0,5 pt
   (d) Quelle est la nature du triangle JAP ? 0,5 pt

@KamerHighSchool

EXERCICE 4 :/3 pts

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. L'unité graphique est 1cm. OAB est un triangle rectangle en O tel que $mes\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$.

1. On note s, la similitude directe telle que $s(O) = A$ et $s(B) = O$. Soit Ω son centre.
   (a) Justifier le fait que la mesure de son angle est égal à $\frac{\pi}{2}$. 0,5 pt
   (b) Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OA]$. 0.5 pt
   (c) On admet de même que Ω appartient aussi au cercle de diamètre $[OB]$. En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB. 0,5 pt
2. On désigne par (Δ), une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB). On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs de A et B sur la droite (Δ).
   (a) Déterminer les images des droites (BB') et (Δ) par la similitude s. 0,5 pt
   (b) Déterminer le point $s(B')$. 0,5 pt
   (c) En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre $[A'B']$. 0,5 pt

@KamerHighSchool