MINESEC **Année scolaire : 2010-2011**
Lycée de Japoma **Classe : T^le D Durée : 4h**
Département de Mathématiques **Séquence 4 Mars 2011**
Coef : 04

Épreuve de Mathématiques

EXERCICE 1 **4.5 points**

Pour tout nombre entier naturel n, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x dx.$$

1. Calculer I_0 et J_0. [1pt]

2. On suppose que $n \geq 1$.

a. En intégrant par parties I_n puis J_n, montrer que : [1,5pt] $\begin{cases} I_n + nI_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

b. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n. [1,5pt]

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$. [0,5pt]

EXERCICE 2 **5 points**

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin. [0,25pt×3]

2. **a.** Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$. [1,5pt]

b. En déduire la nature du triangle ABC. [0,25pt]

c. Déterminer le centre et le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit au triangle ABC et tracer $(\mathscr{C})$. [1pt]

3. **a.** En posant $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, démontrer que l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon R et tracer (Γ). [1pt]

b. Vérifier que les points A et B appartiennent à (Γ). [0,5pt]

4. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Déterminer l'écriture complexe de r. [0,5pt]

b. En déduire les images de A, B et C par r. [0,5pt]

Problème **10.5 points**

Partie A (2pts). Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Etudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et en $-\infty$. [0,5+0,25×2 =1pt]

2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que l'on a : $-1,28 < \alpha < -1,27$. [0,5+0,25=0,75pt]

3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ lorsque x décrit $\mathbb{R}$. [0,25pt]

Partie B (5,25pt). Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un reprère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unité de longueur graphique : 4cm).

1. **a.** Montrer que pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{e^x \varphi(x)}{(e^x+1)^2}$. [0,5pt]

b. En déduire le sens de variation de f. [0,25pt]

2. α étant la solution de l'équation $\varphi(x) = 0$, trouvée à la deuxième question de la partie A, montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$. [0,25pt]

3. On désigne par (T) la tangente à (C) en son point d'abscisse 0.

a. Déterminer l'équation réduite de (T). [0,25pt]

b. Etudier les positions relatives de (C) par rapport à (T). [0,5pt]

4. **a.** Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. [1pt]

b. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C). [0,5pt]

c. Etudier les positions de (C) par rapport à (D). [0,5pt]

5. Dresser le tableau de variation de f. [0,5pt]

6. Tracer sur un même graphique (C), (D) et (T). [0,5+0,25+0,25=1pt]

Partie C (3,25pts). Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \ln(1+e^x)$. Soit (Γ) la représentation graphique de g dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ défini dans la partie B. Soit $I(1,0)$, A le point de (Γ) d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1.

1. Etudier les variations de g. [0,5pt]

2. Déterminer une équation de la tangente en A à (Γ). [0,25pt]

3. On note P le point d'intersection de cette tangente avec le segment $[IB]$. Calculer les aires des trapèzes $OIPA$ et $OIBA$. [1pt]

4. On admet que la courbe (Γ) est située entre les deux segments $[AP]$ et $[AB]$. Montrer que [0,5pt]

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq \ln(\sqrt{2(1+e)}).$$

5. En utilisant une intégration par parties pour calculer $\int_0^1 g(x)\,dx$, justifier que : [0,5pt]

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \ln(1+e) - \int_0^1 g(x)\,dx.$$

En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x)\,dx$. [0,5pt]