MINESEC
Lycée de Japoma
Département de Mathématiques

Année scolaire 2013-2014
Classe : T^le D Durée : 4heures
Séquence 2, Novembre 2013
Coef 4

Épreuve de Mathématiques

Le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier toutes ses affirmations.

EXERCICE 1 **4 points**

1. Déterminer par la méthode du pivot de Gauss, le triplet (x, y, z) solution du système (1) ci-après : [1pt]

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x-2y-7z=0 \\ 6x-5y-11z=0 \end{cases} \quad (1)$$

2. Un homme, sa femme et leur enfant ont au total 100 ans. Dans n années, l'homme aura la somme des âges de sa femme et de l'enfant. Il y a n années, la femme avait le quadruple de l'âge de l'enfant et l'homme était 6 fois plus âgé que l'enfant.

a. Montrer que la résolution de ce problème est équivalente à la résolution du système (1). [1pt]

b. En déduire les âges actuels des trois personnes. [1pt]

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant : $\begin{cases} 2x-3y+z=6 \\ x+y-z=3. \end{cases}$ [1pt]

EXERCICE 2 **5 points**

1. Démontrer par récurrence les propositions suivantes.

a. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; [1pt]

b. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$; [1pt]

c. Pour tout entier naturel n, $5^{2n} - 4^n$ est un multiple de 7. [1pt]

2. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

a. Calculer u_1, u_2, u_3. [1pt]

b. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante. [1pt]

EXERCICE 3 **08 points**

1. **a.** Mettre sous forme cartésienne les nombres complexes suivants : [1,5pt]

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{3}i}, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}, \quad \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}, \quad e^{it}+e^{is}, \text{ où } t,s \in \mathbb{R}.$$

b. Déterminer le paramètre réel a pour que le nombre complexe

$$z = \frac{1+ai}{2a+(a^2-1)i}$$

soit imaginaire pur. [0,5pt]

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm. On note P le point d'affixe $p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

a. i. Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1. [0,5pt]

ii. Faire une figure et construire les points P et Q. [0,5pt]

b. i. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure. [1pt]

ii. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ. [0,5pt]

3. **a.** Calculer de deux façons différentes la racine carrée de $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. [1pt]

b. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$. [1pt]

4. Soit a un paramètre réel. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :



$$z^2 - (1+i)(1+a)z + i\left(1+a^2\right) = 0.$$

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\delta^2 = -2i(1-a)^2$. [0,5pt]

b. Déduire les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E). [1pt]

EXERCICE 4 **3 points**

1. Calculer les limites suivantes : [1,5 pt]

$a) -\lim\limits_{x\longmapsto+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-2x\right)$; b) - $\lim\limits_{x\longmapsto+\infty}\dfrac{-x+3\sqrt{x-1}}{2x+\sqrt{4x^2+x}}$; c) - $\lim\limits_{x\longmapsto\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x-1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f. [0,5pt]

b. Calculer $\lim\limits_{x\to4} f(x)$. [0,5pt]

c. f est elle prolongeable par continuité en 4 ? Si oui, donner son prolongement. [0,5pt]

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques, car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. »François Bacon.