MINESEC _ Lycée de guider
Département de Mathématiques

Examen : Baccalauréat blanc N°1
Série : D&TI
Session de : février 2020
Durée : 4 heures **Coef** : 4

Epreuve de Mathématiques

Consigne : ***L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur 20 points. Rédaction exigée. Qu'on se le dise !!***

Exercice 1 / 4 points

I-/ *Pour chacune des questions suivantes, Trois réponses sont proposées parmi lesquelles une seule est juste. Recopier le numéro de la question et la réponse juste correspondante.*

1. La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ est :

   a. 0 b. $\frac{-\pi}{2}$ c. $\frac{-2}{\pi}$ 0,5pt

2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $e^{-x+5} > 3$ est :

   a. $]-\infty;5-\ln 3[$ b. $]5-\ln 3;+\infty[$ c. $]-\infty;\ln 3-5[$ 0,5pt

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm. L'aire, en cm² du domaine défini par : $\begin{cases} 0 \le x \le \ln 2 \\ 0 \le y \le e^x \end{cases}$ est :

   a. 1 b. 4 c. $\ln 2 - 1$ 0,5pt

II-/ 1. Soit l'intégrale $A = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x} \cos 2x \, dx$.

A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $A = \frac{1}{4}$. 1pt

2. On considère les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x} \cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} e^{-2x} \sin^2 x \, dx$

   a. Calculer $I + J$. 0,5pt
   b. Montrer que $I - J = A$ et en déduire la valeur de $I - J$. 0,5pt
   c. A l'aide des questions précédentes déterminer I et J. 0,5pt

Exercice 2 / 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. **Unité graphique 2cm.**

On donne les points A, B et C tels que : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$; $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ et $z_C = 2$.

1. Placer ces points dans le repère. 0,5pt
2. a) Calculer le rapport $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et écrire le résultat sous forme exponentielle. 0,75pt
   b) En déduire la nature du triangle ABC. 0,25pt
   c) Déterminer une équation cartésienne de (Γ_1), cercle circonscrit au triangle ABC, puis construire (Γ_1). 0,5pt
3. Soit (Γ_2), l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que : $2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (Γ_2) et en déduire que (Γ_2) est un cercle dont on précisera Ω son centre et son rayon. 0,75pt
   b) Construire (Γ_2). 0,25pt
   c) Vérifier que les points A et B appartiennent à (Γ_2). 0,5pt
4. On désigne par r, la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
   a) Quelles sont les images des points A et B par la rotation r ? 0,5pt

t.me/KamerHighSchool

b) Déterminer l'écriture complexe de r puis calculer l'affixe de C'. 0,5pt
c) Déterminer l'image du cercle (Γ_2) par la rotation r. 0,5pt

Problème / 11 points

Le problème comporte deux parties A et B.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}} - x - 1$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. **Unité graphique : 2 cm**.

Partie A / 4 points

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. 0,5pt
2. Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. 1pt
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions 0 et α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que $2 \leq \alpha \leq 3$. 0,75pt
4. Montrer que la droite (D) déquation : $y = -x - 1$ est asymptote à (C). 0,25pt
5. Tracer (C) dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. 0,75pt
6. Soit λ un nombre réel strictement inférieur à -1.
   a) Exprimer en fonction de λ l'aire en cm^2 de la portion du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = -1$. 0,5pt
   b) Quelle est la limite de cette aire lorsque λ tend vers $-\infty$? 0,25pt

Partie B / 7 points

On se propose de trouver une valeur approchée de la solution α de l'équation $g(x) = 0$ de la **partie A question 3.**

On considère pour cela la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x+1)$.

1. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation. 1pt
2. Tracer la courbe représentative de la fonction f. 0,5pt
3. Montrer que α est solution de l'équation $f(x) = x$. 0,5pt
4. Montrer que pour $x \in [2\,;+\infty[$, $f(x) \in [2\,;+\infty[$. 0,5pt
5. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[2;+\infty[$, $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$. 0,5pt
6. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.
   a. Sans faire de calcul, représenter les quatre premiers termes de la suite sur le graphique. 1pt
   b. Démontrer par récurrence que pour tout n, $u_n \geq 2$. 0,75pt
   c. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$. 0,75pt
   d. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. 0,75pt
   e. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $|u_p - \alpha| \leq 10^{-3}$. Que représente u_p pour α ? 0,75pt

Examinateur : M. NGANSOB NONO Yves Bertrand (PLEG_Maths)

t.me/KamerHighSchool