MINESEC-Lycée de Garoua Djamboutou **Année scolaire 2018/2019**
Département de Mathématiques **Classe : $T^{le}C$**
BP:584. Janvier 2018 **Durée : 4 hrs 00 m Coef : 5**

Épreuve de Mathématiques
Troisième Séquence

L'épreuve comporte trois exercices et un problème, tous obligatoires. La qualité de la rédaction et la clarté des raisonnements seront prises en compte par le correcteur.

Exercice 1: 3 points

Soit a et b deux nombres réels. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $u_n = \dfrac{an+b}{2^n}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout réel $x > 0$ et $n > 1$, on a: $(1+x)^n > C_n^2 x^2$. **0,5 pt**

2) En déduire que pour tout $n > 1$, on a: $|u_n| < \dfrac{2(|a|n+|b|)}{n(n-1)}$. **0,75 pt**

3) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **0,25 pt**

4) Montrer que les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des entiers si et seulement si a et b sont des entiers relatifs vérifiants $a \equiv 0[8]$ et $b \equiv 0[16]$. **1,5 pt**



Exercice 2: 2.5 points

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous:
(a) $f(x) = x\sqrt{(x^2-3)^3}$, $K =]3, +\infty[$; **(b)** $f(x) = \sin x \cos^2 x \left(\cos^3 x + \sqrt[3]{\pi}\right)^{-\frac{9}{13}}$, $K = \mathbb{R}$. **1 pt**

2) On pose $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2-5x+6}$ et $g(x) = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{3x}-2e^{2x}-5e^x+6} - x\sqrt{(x^2+1)^3}$. **0,75 pt**

a) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2,1,3\}$, $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{x-3}$.

b) Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,1,3\}$. En s'inspirant de la question précédente, déterminer l'ensemble de définition et la primitive de la fonction g qui s'annule en 0. **0.75 pt**

Exercice 3: 3.5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(2;0;1)$, $(3;-2;0)$ et $(2;8;-4)$. **La figure n'est pas demandée**.

1) Un point M étant de coordonnées $(x;y;z)$, exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$. **0.5 pt**

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} -x+y-2z &= -4 \\ x+y+z &= 11 \\ 2x+y-z &= 8 \end{cases}$ **0,75 pt**

3) Montrer qu'il existe un unique point N tel que $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner ses coordonnées. **0,75 pt**

4) On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$ où $\mathcal{B}$ représente l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

a) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCN$ est $\dfrac{1}{6}CN^2$. **0,5 pt**

b) En utilisant le résultat de 1. et en prenant $M = C$, calculer l'aire du triangle ABC. **0,5 pt**

b) Utiliser les résultat précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC). **0,5 pt**

Problème: 11 points

Le problème comporte trois parties A, B et C, toutes indépendantes.

Partie A: 2,25 points

Soit $\mathcal{E}_2$ un plan vectoriel, $B = (\overrightarrow{i}; \overrightarrow{j})$ une base de $\mathcal{E}_2$, f l'endomorphisme de $\mathcal{E}_2$ qui à tout vecteur $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ associe le vecteur $\overrightarrow{u'} = (x + \frac{1}{2}y)\overrightarrow{i} + (-2x - y)\overrightarrow{j}$.

1) **a)** f est-il un automorphisme? **0,75 pt**

b) Déterminer $Kerf$ et Imf. En déduire que $Kerf = Imf$. **0,75 pt**

2) Soit $\overrightarrow{e}_1$ et $\overrightarrow{e}_2$ deux vecteurs de $\mathcal{E}_2$ de coordonnées respectives $(-1; 2)$ et $(-1; 1)$.

a) Montrer que $B' = (\overrightarrow{e}_1; \overrightarrow{e}_2)$ est une base de $\mathcal{E}_2$. **0,25 pt**

b) Donner la matrice de f dans la base B'. **0,5 pt**

Partie B: 4 points

On donne la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 4 + \ln x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α tels que $1 < \alpha < 2$. **0,75 pt**

2) On cherche une valeur approchée de α par la m éthode du point fixe. On considère la fonction g définie par $g(x) = 2 - \dfrac{1}{2}\ln x$, et $x \in K = [1; 2]$.

a) Montrer que $g(\alpha) = \alpha$, puis que pour tout $x \in K$, $g(x) \in K$. **0,5 pt**

b) Montrer que pour tout $x \in K$, $| g'(x) | \leq \frac{1}{2}$, puis que $| g(x) - \alpha | \leq \frac{1}{2} | x - \alpha |$. **0,75 pt**

3) On définie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par: $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$, puis que $| u_{n+1} - \alpha | \leq \frac{1}{2} | u_n - \alpha |$. **0,75 pt**

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $| u_n - \alpha | \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. **0,5 pt**

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. **0,25 pt**

d) Déterminer l'entier naturel n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $| u_n - \alpha | < 10^{-3}$. **0,5 pt**

Partie C: 4.75 points

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, on définit la fonction f_a par: $f_a(x) = \begin{cases} x\ln|x| - (x-a)\ln|x-a|, & x \in \mathbb{R}^*,\ x \neq a. \\ f_a(0) = f_a(a) = a\ln|a| \end{cases}$

On suppose que $a > 0$ et on pose $I = [\frac{a}{2}; +\infty[$.

1) Etudier la continuité de f_a en 0 et a. **0.5 pt**

2) **a)** Montrer que $\frac{f_a(x)-f_a(0)}{x} = -\ln\left|1 - \frac{a}{x}\right| + \frac{a}{x}\ln\left|\frac{x}{a} - 1\right|$. **0.5 pt**

b) En déduire la dérivabilité de f_a en 0. (On rapelle que $\lim_{m\to 0} \frac{\ln(1+m)}{m} = 1$). **0,5 pt**

c) Montrer que la droite (Δ) d'équation $x = \frac{a}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_a$ de la fonction f_a. **0,25 pt**

d) En déduire la dérivabilité de f_a en a. **0.25 pt**

3) **a)** Montrer que la dérivée de f_a est définie par: $f'_a(x) = \ln\left|\dfrac{x}{x-a}\right|$ sur $I^* - \{a\}$, puis en déduire les variations de f_a sur I. **0.5 pt**

b) Calculer la limite de f_a en $+\infty$ et préciser la branche infinie de la courbe $(\mathcal{C}_a)$. **0,5 pt**

c) Dresser le tableau de variations de f_a sur I puis sur $\mathbb{R}_+$. $(a > 0)$ **0,25 pt**

4) **a)** Montrer que les courbes $(\mathcal{C}_a)$ et $(\mathcal{C}_{-a})$, sont symétriques par rapport à un élément de symétrie que l'on précisera. **0.5 pt**

b) Construire sur $\mathbb{R}_+$ les courbes $(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})$ et $(\mathcal{C}_{-\frac{1}{2}})$, dans le même repère. **1 pt**

"LA MEILLEUR FACON DE PREDIRE L'AVENIR EST DE LE CREER." **Peter Drucker.**

Travaillez, travaillez, travaillez encore et travaillez par vous même.