MINESEC
LYCÉE D'ELIG-MFOMO **ANNÉE SCOLAIRE : 2019-2020**
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Évaluation sommative n° 3
Classe : T^{le}C ; Durée : 2 h ; Coef : 05
Examinateur : Georges Michaël TCHOUPA

Exercice 1 : ..... 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{3+4i}{5}z + \frac{1-2i}{5}$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Montrer que : $\begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 4y + 1) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y - 2) \end{cases}$. [1pt]
2. (a) Déterminer l'emsemble des points invariants par f. [0.5pt]
   (b) Quelle est la nature de l'application f ? [0.5pt]
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M du plan d'affixe z tel que z' soit réel. [0.5pt]
4. (a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $4x + 3y = 2$. [1pt]
   (b) En déduire les points de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont entières. [0.5pt]
5. On considère les points M d'affixe $z = 1 + iy$ tel que $y \in \mathbb{Z}$. Déterminer les entiers y tels que $Re(z')$ et $Im(z')$ soient entiers. (*On pourra utiliser les congruences modulo 5*) [1pt]

Exercice 2 : ..... 4.5 points

1. Dans chaque cas, déterminer les primitives de la fonction sur K :
   (a) $f(x) = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{x^2}$ $\quad K =]0; +\infty[$. [0.5pt]
   (b) $g(x) = \cos^5 x$ $\quad K = \mathbb{R}$. [1pt]
2. En déduire la primitive de la fonction g qui prend la valeur 1 en $\frac{\pi}{2}$. [0.5pt]
3. On considère la fonction g de $]-\pi; \pi[$ vers $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = \tan\frac{x}{2}$.
   (a) Montrer que la fonction g admet une bijection reciproque g^{-1}. [1pt]
   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa fonction dérivée. [1.5pts]

Problème : ..... 10.5 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - |x-1|}{(x+1)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. [0.5pt]
2. Écrire f sans symbôle de valeur absolue et déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. [1.5pts]
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition. [2pts]
4. Dresser le tableau de variation de f. [1.5pts]
5. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unité 1 cm sur chaque axe. [1pt]
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont on déterminera les signes. On notera α la plus petite des deux solutions. [1pt]
7. Déterminer par dichotomie une valeur approchée de α à 10^{-2} près. [1pt]
8. Discuter suivant les valeurs du réel m, le nombre et le signe des solutions de l'équation [2pts]
$$(1-m)x^2 - 2mx - |x-1| = m.$$

"Bonne et heureuse année 2020."