Ministère des Enseignements Secondaires **Séquence : 4**
DRES :Ouest\ DDES :Menoua\ Lycee de Djeu **Classe : T^{le} Série : C**
Année scolaire 2018-2019 **Durée : 4h Coef : 5**

Epreuve de Mathématiques

(*L'épreuve comporte deux exercices et un problème répartis sur deux pages. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.*)

Exercice 1 [5 points]

I- L'entier S désignent la somme des diviseurs de p^4, où p est un nombre premier plus grand que 2.

1- Exprimer S en fonction de p **[0.5pt]**

2- Démontrer que $(2p^2+p)^2 < 4S < (2p^2+p+2)^2$ **[0.5pt]**

3- On suppose que S est un carré parfait et on pose $S = n^2$ où n est un entier naturel.

a- Etablir l'existence et l'unicité de n lorsque p est fixé.(On pourra utiliser la question 2) **[0.75pt]**

b- Exprimer n en fonction de p. **[0.5pt]**

c- Etablir que p vérifie la relation $3+2p-p^2=0$.(On pourra utiliser le faite que $4s = 4n^2$) **[0.5pt]**

d- Déduire p et n. **[0.5pt]**

II- L'objectif de cette partie est de calculer les intégrales I, J et K définies par :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}},\quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \text{ et } K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$$

1- On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$

a- Calculer la dérivée f' de f sur le segment $[0,1]$. **[0.25pt]**

b- En déduire alors le calcul de l'intégrale I. **[0.25pt]**

2- Calcul des intégrales J et K.

a- Sans calculer explicitement les intégrales J et K, vérifier que $J+2I = K$. **[0.25pt]**

b- A l'aide d'une intégration par partie portant sur K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$ **[0.5pt]**

c- Déduire les valeurs de J et K. **[0.5pt]**

Exercice 2 [4.25 points]

Pour tout n entier naturel, f_n désigne la fonction définie par : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$. On définit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $\alpha_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1-a)Démontrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et est à termes positifs. **[0.5pt]**

b)Vérifier que $\alpha_1 = \ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$et calculer $\alpha_0+\alpha_1$. En déduire la valeur exacte de α_0. **[1pt]**

c)Pour tout n entier naturel non nul, calculer en fonction de n la somme $\alpha_n+\alpha_{n+1}$. **[0.75pt]**

2- a)Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $\dfrac{e^{-nx}}{2} \le f_n(x) \le \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-1}}$. **[0.75pt]**

b)En déduire un encadrement de α_n pour tout n entier naturel non nul. **[0.75pt]**

3-Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$. **[0.5pt]**

PROBLÈME [10.75pts]

PARTIE A – **Equations différentielles[2.5pts]**

On considère les équations differentielles $(E): y''-2y'+y = 4e^x$ et $(E'): y''-2y'+y=0$.

1. On pose $u(x) = 2x^2e^x$.
   Vérifier que la fonction u soit une solution de l'équation (E). **[0.5pt]**
2. Montrer qu'une fonction φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - u$ est solution de l'équation (E'). **[0.75pt]**
3. Résoudre l'équation (E') et déterminer l'unique solution φ de (E) dont la courbe représentative admet au point $A(1,6e)$ une tangente horizontale. **[1.25pts]**

https://t.me/KamerHighSchool

PARTIE B – **Point fixe de la fonction f.[8.25pts]**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}$.
On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})(\| i \| = \| j \| = 1cm)$.

1. (a) Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation sur $[0; +\infty[$. **[1pt]**
   (b) Etudier le signe de la fonction f. **[0.5pt]**
   (c) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\left|f'(x)\right| \leq \dfrac{1}{2}$. **[1pt]**
   (d) Tracer la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **[0.75pt]**
2. Soit D le domaine du plan délimité par les droites d'équation $x = 8$, $x = 0$, l'axe des abscisses et la courbe (C). Calculer l'aire du domaine D. **[1pt]**
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$.
   (a) Etudier les variations de la derivee g' de g sur $\mathbb{R}$. **[0.75pt]**
   (b) Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet dans $]-0,6; -0,5[$ une unique solution. **[0.75pt]**
4. Soit (U_n) la suite numerique definie par : $U_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.
   (a) Montrer par recurrence que pour tout entier naturel n. $U_n \geq 0$. **[0.5pt]**
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$. **[0.5pt]**
   (c) En déduire que :$|U_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. **[0.75pt]**
   (d) En déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite. **[0.75pt]**

Bonus Question : bilingual game

We consider in the complex plane the points $A(2-2i\sqrt{3})$, $B(2+2i\sqrt{3})$ and $C(8)$. Let S is the direct similarity defined by $S(A) = B$ and $S(C) = C$. Determine the complex expression of S and give its characteristic elements. **[1pt]**

Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. Travaillez, travaillez par vous même, c'est là la clé du succès.

Proposé par : **Gaétan NGATCHA**/ *PLEG*