MINESEC	LYCEE CLASSIQUE D'EDEA			
20.01.2018	EXAMEN :	SEQUENCE N° 3	Durée : 4h	Classe : T^{le} C
COEFF. 5	EPREUVE :	MATHEMATIQUES	Prof : T.N.AWONO MESSI	

EXERCICE 1 : 4,25 points

$ABCD$ est un carré direct de centre O. E est le milieu de $[CD]$, F et G sont des points tels que $DEFG$ est aussi un carré direct. (Δ) est la médiatrice de $[AD]$ et E_2 un espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On note R_A et R_B les quarts de tour directs de centres respectifs A et B.

1. Identifier les transformations : $f = S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$; $g = R_A \circ R_B$ et $h = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$. **0,75pt**
2. Soit S la similitude directe de centre D qui transforme A en B. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à $ABCD$ et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF).
   (a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S. **0,5pt**
   (b) Déterminer $S(E)$, puis calculer $mes(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FB})$ et en déduire que $I \in \mathscr{C}$. **0,75pt**
   (c) Montrer que les droites (IB) et (DI) sont orthogonales. **0,5pt**
3. On suppose le plan rapporté au repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et $\vec{j} = \dfrac{\overrightarrow{AD}}{AD}$. On pose $AB = 3$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$. Soit φ l'application linéaire associée à S. Donner l'écriture complexe de S. Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v})$. **0,75pt**
4. **(a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $F_\lambda = \left\{\vec{a} \in E_2 / \varphi(\vec{a}) = \lambda \vec{a}\right\}$ est un s.e.v de E_2. **0,5pt**
   (b) Existe-t-il des valeurs de λ pour lesquelles F_λ n'ai pas réduit au vecteur nul de E_2 ? **0,5pt**

EXERCICE 2 : 2 points

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : 11x + 2y = 94$. **0,75pt**
2. Soient a et b deux entiers relatifs. On pose $n = 11a - 60$ et $n = 2b + 34$.
   (a) Montrer que le couple $(a, -b)$ est solution de l'équation (E). **0,25pt**
   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 22. **0,25pt**
3. HAMIDOU est né en $\overline{19\alpha\beta}^{10}$. En 2004, son âge était curieusement égal à la somme des chiffres de son année de naissance. Quel était son âge en 2004 ? **0,75pt**

EXERCICE 3 : 3,75 points

A) 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i\right)z - 1 = 0$. **0,5pt**

2. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + i$, $z_B = \dfrac{1}{2}(-1 + i)$ et $z_C = \overline{z_A}$.
   (a) Déterminer les ensembles (Γ_1) et (Γ_2) des points M d'affixe z du plan tels que :
   $(\Gamma_1) : \left(z + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)\left(\bar{z} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = 4$ $\qquad$ $(\Gamma_2) : |2z + 1 - i| = 2CM$. **0,75pt**
   (b) Déterminer $mes(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}})$ et en déduire la nature du triangle OCA. **0,5pt**
   (c) Déterminer l'écriture complexe de la symétrie orthogonale d'axe (AC). **0,5pt**

https://t.me/KamerHighSchool

B) Dans l'espace $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ où $\vec{k}=\vec{i}\wedge\vec{j}$, on considère les points $N\left(6;0;0\right), E\left(0;6;0\right), D\left(0;0;4\right)$ et $\mathscr{P}$ le plan $\left(O,\vec{i},\vec{k}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées du point $G=bar\left\{(O,1);(N,2);(E,3)\right\}$. **0,25pt**
2. Ecrire une équation de l'ensemble $\mathscr{S}=\left\{M\in\mathscr{E}/\left(\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{ME}\right)\cdot\overrightarrow{MD}=0\right\}$. **0,5pt**
3. Déterminer l'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{S}$. **0,75pt**

PROBLEME : 10 points

A) Soit g la fonction définie par $g\left(x\right)=-2\ln\left(x+1\right)+\dfrac{x}{x+1}$.

1. **(a)** Déterminer D_g, puis calculer les limites aux bornes de D_g. **0,75pt**
   (b) Calculer $g'\left(x\right)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g. **1pt**
2. **(a)** Montrer que l'équation $g\left(x\right)=0$ admet exactement 2 solutions dont l'une que l'on désigne α est telle que $-0,72<\alpha<-0,71$. **0,75pt**
   (b) Déterminer le signe de $g\left(x\right)$. **0,5pt**

B) Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f\left(x\right)=\left(1+x\right)e^{-x-1} & \text{si } x\leq -1 \\ f\left(x\right)=\dfrac{x^2}{\ln\left(x+1\right)} & \text{si } x>-1 \\ f\left(0\right)=0 \end{cases}$

1. **(a)** Montrer que $D_f=\mathbb{R}$ et calculer les limites aux bornes de D_f. **0,75pt**
   (b) Etudier la nature des branches infinies. **0,5pt**
2. **(a)** Etudier la continuité de f en -1 et en 0. **0,5pt**
   (b) Etudier la dérivabilité de f en -1 et en 0. Interpréter graphiquement les résultats. **1pt**
3. **(a)** Montrer que pour tout $x\in\left]-1;+\infty\right[$ et $x\neq 0$, on a : $f'\left(x\right)=\dfrac{-xg\left(x\right)}{\ln^2\left(x+1\right)}$ et calculer $f'\left(x\right)$ sur $\left]-\infty;-1\right[$. **0,5pt**
   (b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **0,75pt**
4. Soit h la restriction de f à $\left[0;+\infty\right[$.
   (a) Montrer que h réalise une bijection de $\left[0;+\infty\right[$ sur un intervalle J à préciser. **0,25pt**
   (b) Donner le sens de variation de h^{-1}. **0,25pt**
   (c) Tracer C_f et $C_{h^{-1}}$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. **1pt**

C) Soit φ la fonction définie par $\varphi\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(x+1\right)}{x^2}-\dfrac{1}{x\left(x+1\right)}$.

1. Déterminer les fonctions u et v définies telles que pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$,
   $\varphi\left(x\right)=u'\left(x\right)v\left(x\right)+u\left(x\right)v'\left(x\right)$. **0,5pt**
2. En déduire la fonction H définie sur $\left]0;+\infty\right[$ telle que $H'\left(x\right)=\varphi\left(x\right)$. **0,5pt**
3. Calculer alors $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{f\left(x\right)}dx$. **0,5pt**

https://t.me/KamerHighSchool