Lycée Classique d'Edéa
Département de Mathématiques — Année scolaire : 2010/2011

Classe : $1^{ere}$**C** Durée : 3h ; coef : 6
*janvier 2011*
**Epreuve de Mathématiques. $3^e$ séquence**
Examinateur : **Ngankou S. O**

*L'épreuve comporte deux exercices et un problème, tous obligatoires. Le candidat devra justifier autant que possible ses affirmations. Les calculatrices électroniques sont autorisées.*

**Exercice 1.** *Inéquation trigonométrique et position relative d'une droite et d'un cercle[3pts]*

1. Résoudre l'inéquation $\tan^2 x + (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} < 0$ dans $]-\pi, \pi]$et représenter les solution sur le cerle trigonométrique. [1pt]
2. Dans la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.Soit $m$ un paramètre réel et $(D_m)$ la droite d'équation $4x-3y+m=0$.
   (a) Déterminer le rayon de $\mathcal{C}$ et les coordonnées de son centre $A$. [0.5pt]
   (b) Calculer en fonction de $m$ la distance $\mathcal{D}(A,(D_m))$ de $A$ à la droite $(D_m)$. [0.5pt]
   (c) Determiner suivant les valeurs du réel $m$ la position de $(D)$ par rapport à $\mathcal{C}$. [1pt]

**Exercice 2.** *Barycentre et Isométrie du plan[6pts]*

*L'unité graphique est le centimètre.* $ABC$ est un triangle équilatéral de sens direct, de coté 6.$I$, $J$ et $K$ sont les milieux respectifs des côté $[AB]$,$[BC]$ et $[CA]$ de centre $O$.
On considère l'ensemble $(\mathcal{L})$ des points $M$ tels que : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 6\sqrt{3}$.

1. (a) Réaliser la figure et justifier que $A$ appartient à $(\mathcal{L})$. [0.5pt]
   (b) Déterminer et construire le barycentre $G$ des points pondérés $(A,1)$, $(B,1)$ et $(C,1)$. [0.25pt]
   (c) Déterminer et construire $(\mathcal{L})$. [0.5pt]
2. Soit $f$ l'application du plan dans le plan qui à tout point $M$ associe le point $M'$ tel que : $2\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$
   (a) Montrer que pour tout point $M$ d'image $M'$ par $f$, $2\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MG}$. [0.25pt]
   (b) En déduire la nature et les élements caractéristiques de $f$. [0.75pt]
   (c) Déterminer et construire l'image $(\mathcal{L}')$ de $(\mathcal{L})$ par $f$. [0.5pt]
   (d) Que représente $(\mathcal{L}')$ pour le triangle $IJK$ et pour le triangle $ABC$. [0.5pt]
3. (a) Dans chacun des cas déterminer la droite $(\Delta)$ vérifiant cette égalité :
   $(i)$ $t_{\overrightarrow{CI}} = S_{(AB)} \circ S_{(\Delta)}$ ; $(ii)$ $r_{(A,\frac{\pi}{3})} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$. [ 0.25pt ×2]
   (b) Déterminer la nature et les élements caractéristiques des applications suivantes :
   $(i)$ $S_{(AB)} \circ S_{(KJ)}$ ; $(ii)$ $S_{(AJ)} \circ S_{(CI)}$ ; $(iii)$ $t_{\overrightarrow{AK}} \circ t_{\overrightarrow{AI}}$ ;
   $(iv)$ $r_{(G,-\frac{2\pi}{3})} \circ r_{(A,\frac{\pi}{3})}$ ; $(v)$ $r_{(A,\frac{\pi}{3})} \circ t_{\overrightarrow{CI}}$. ; $(vi)$ $r_{(G,-\frac{2\pi}{3})} \circ h_{(G,-\frac{1}{3})}$ [0.25×3 +0.5pt×3]


https://t.me/KamerHighSchool

**Problème 1** (11pts)**.**
*Le problème comporte deux parties*

**PARTIE** A : Signe d'une fonction [4pts]

***I*** Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par :$h(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ où $a$,$b$ et $c$ sont trois réels.
Determiner les réels $a$,$b$ et $c$ sachant que la courbe $\mathcal{C}_h$ passe par le point $A(0;2)$ et possède une tangente horizontale au point $B(1;4)$. [1pt]
***II*** Soit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par :$g(x) = -x^3 + 3x + 2$ .

1. Calculer les limites au borne du domaine de définition de $g$ . [0.5pt]
2. Etudier les variations de $g$ puis dresser son tableau de variation. [1pt]
3. Expliquer pourquoi $-1$ et 2 sont les seules solutions réelles de l'équation $g(x) = 0$. [0.75pt]
4. En déduire que le tableau de signe de $g(x)$ est : [0.75pt]

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**PARTIE** B : Etude d'une fonction [7pts]

On considère la fonction $f$ définie de $\mathbb{R} - \{0\}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x^3-3x-1}{x^2}$. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *L'unité graphique est le centimètre.*

1. Calculer les limites au borne du domaine de définition de $f$ . [1pt]
2. On note $f'$ la fonction dérivée de $f$. Montrer que pour $x \neq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$. [0.5pt]
3. Etudier les variations de $f$ puis dresser son tableau de variation. [1pt]
4. (a) Montrer que la droite$(D)$ d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C})$. [0.5pt]
   (b) Etudier la position de$(\mathcal{C})$par rapport à $(\mathcal{D})$. [0.75pt]
5. Montrer que pour $x \neq 0$, $f''(x) = \frac{-6x-6}{x^4}$ et en déduire que le point d'abscisse $-1$ est un point d'inflection à $(\mathcal{C})$. [1pt]
6. Déterminer les équations des droites $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{T}')$ tangentes à $(\mathcal{C})$ respectivement au point d'abscisse 1 et au point d'abscisse $-1$ . [ 0.75pt]
7. Construire $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{T})$, $(\mathcal{T}')$ et $(\mathcal{C})$. [1.5pt]
   ***QUESTION BONUS***
8. Utiliser la courbe $(\mathcal{C})$ de $f$ pour déterminer en fonction du paramètre réel $m$ le nombre et le signe des solutions éventuelles de l'équation $(E_m) : f(x) = m$. [1pt]


https://t.me/KamerHighSchool