MINESEC
LYCLAMO NDERE
Département de Mathématiques

ANNEE SCOLAIRE : 2019/2020
CLASSE : T_D
Durée : 4h coefficient : 4
Date : ……/12/2019

Évaluation de Mathématiques No 2 du trimestre No 2
Proposée par : *M. DONTSA CEDRIC*

NB : *le correcteur tiendra compte de la rigueur dans la rédaction et de la clarté de la copie. Il est demandé à l'élève de justifier si besoin est, toutes ses affirmations.*

EXERCICE 1 : 5 points

I- On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}cos^2xdx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}sin^2xdx \quad et\ u\ \ la\ fonction\ définie \text{ sur } \mathbb{R}$$

par $u(x) = e^{2x}(cos2x + sin2x)$

1) Calculer $I + J$ **0.5 pt**
2) a- Calculer $u'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ **0.5 pt**
   b- En déduire la valeur de $I - J$ **0.75 pt**
3) En déduire les valeurs de I *et* J **1 pt**

II- On considère la fonction F définie par $F(x)=\int_e^x \frac{lnt}{2-t}dt$

1) Justifier que F est définie sur $D_F =]2 ; +\infty[$ **0.75 pt**
2) Déterminer $F'(x)\ \forall x \in D_F$ et en déduire le sens de variation de F sur D_F **0.75 pt**
3) Déterminer F(e) et en déduire le signe de F(x) $\forall x \in D_F$. **0.75 pt**

EXERCICE 2 : 5 points

1- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = cos^3x\ sin^2x$.

a) Montrer que $f(x) = cosx(sin^2x - sin^4x)$ **0.5pt**
b) En déduire la primitive F de f sur $]0, +\infty[$ dont la courbe passe par la point $A(\pi ; -1)$ **0.75pt**

2- Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{4x^2-5x+3}{(x-1)(x^2-x+1)}$

a- Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $x > 1$, $g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ **0.75pt**
b- En déduire toutes les primitives de g sur $]1; +\infty[$ **0.5pt**
c- Déterminer la primitive G de g sur $]1, +\infty[$ tel que $G(2) = ln3$ **0.5pt**

3- On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x)=x-lnx$

a) Dresser le tableau de variation de f **1pt**
b) L'équation $f(x)=0$ admet-t-elle de solution sur $]0, +\infty[$? Justifier. **0.5pt**
c) En déduire le domaine définition de la fonction g définie par $g(x) = \frac{5e^{-x}}{x-lnx}$ **0.5pt**

Problème : *(10 points)*

Le plan est muni du repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 2cm.

Partie A : *Etude d'une fonction auxiliaire* *(3.5pts)*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3-2x)e^{3-2x} - 2$

1- Calculer les limites de f en -∞ et en +∞ **0.75pt**
2- Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (4x-8)e^{3-2x}$ **0.5pt**
3- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation **0.5pt**
4-
   a- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\mathbb{R}$ et monter que $\alpha \in]1\,;1{,}5[$ **0.75pt**
   b- En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x **0.5pt**
5- Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie par $g(x) = (ax+b)e^{3-2x} - 2x + 3$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$. **0.5pt**

Partie B : *(5.25pts) Etude de la fonction g*

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^{3-2x} - 2x + 3$ et on désigne par (C) sa courbe représentative.

1- Calculer les limites de g en -∞ et en +∞ **0.5pt**
2- Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation de g **0.75pt**
3- a-Montrer que la droite (D) : $y = -2x + 3$ est asymptote oblique à (C) en +∞

   b-Etudier la position relative de (C) par rapport à (D) **0.75pt**

4- Démontrer que (C) admet en -∞ une branche parabolique de direction (OJ) **0.5pt**
5- Montrer que $g(\alpha) = 3 - 2\alpha + \frac{2\alpha-2}{3-2\alpha}$ **0.5pt**
6- On suppose que $\alpha = 1{,}2$. Déterminer $g(\alpha)$ et en déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions β_1 *et* β_2 sur $\mathbb{R}$ tels que $\beta_1 \epsilon]0\,;1[$ *et* $\beta_2 \epsilon]1{,}5;2[$. **1.25pt**
7- Construire (D) et (C). **1pt**

Partie C : (*2.25pts) Calcul d'aire*

1- Déterminer l'aire du domaine du plan compris entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x=0 et x=2 **0.75pt**
2- a) Soit λ un nombre réel supérieur à 1.
   En utilisant une intégration par parties, déterminer l'aire A_λ en cm^2 du domaine du plan compris entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x=1 et x= λ. **0.75pt**
   b) Déterminer $\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda$ et interpréter graphiquement le résultat. **0.75pt**