Ministère des Enseignements Secondaires
Lycée Classique de Bafoussam

Examen : 2è Séquence
Session : Nov-Dec 2017
Série : Tle $C_{1,2}$
Épreuve : Mathématiques
Durée : 3h
Coef : 5

NB : La qualité du raisonnement sera prise en compte

Exercice 1

1. (a) En utilisant l'algorithme d'euclide, déterminer les entiers naturels a et b sachant qu'on a eu dans la division euclidienne de a par b les quotients suivants 1, 2, 1, 1, 2 et que $pgcd(a,b)=9$. 0.5pt
   (b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $162x+117y=27$. 0.75pt
2. Soit $n\in\mathbb{Z}$. On donne $A=11n+3$ et $B=13n-1$.
   (a) Montrer que $pgcd(A,B)=pgcd(n-27,50)$. 0.5pt
   (b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles :
      i. $pgcd(A,B)=50$; 0.5pt
      ii. $pgcd(A,B)=25$; 0.5pt
      iii. $pgcd(A,B)=4$. 0. 25pt
   (c) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\frac{B}{A}$ est une fraction irréductible. 0.5pt

Exercice 2

Soient x et y des entiers naturels non nuls. On pose $d=pgcd(x,y)$ et $\mu=ppcm(x,y)$.

On considère l'équation $(E): d+\mu-x=8$

1. Montrer qu'il existe un couple (x',y') d'entiers naturels premiers entre eux tel que $\mu=d\cdot x'\cdot y'$. 0.25pt
2. En déduire que si (x,y) est solution de (E) alors $d\in\{1;\ 2;\ 4;\ 8\}$. 0.5pt
3. En déduire toutes les solutions de (E) pour lesquelles $d\in\{4;8\}$. 0.75pt

Exercice 3

Le plan complexe est muni du repère $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même vérifiant $f(O)=O$ et qui à tout point M d'affixe z non nul associe le point M' d'affixe z' telle que : **z'z=4**
Soit A et B les points d'affixe 2 et -2.

1. Quel est l'ensemble des points invariants par f .? 0.5pt
2. Démontrer que pour tout point M distinct du point O et son image M', la droite (AB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MOM'}$. 0.75pt
3. (a) Vérifier que : $\forall z\in\mathbb{C},\ (\frac{z+z'}{2}-2)\times(\frac{z+z'}{2}+2)=(\frac{z-z'}{2})^2$. 0.5pt
   (b) En déduire $IA\times IB=IM^2$ où I est milieu du segment $[MM']$. 0.5pt
   (c) Montrer que pour tout M distinct de A et B, la droite (MM') est la bissectrice de l'angle $\widehat{AIB}$. 0.75pt
4. On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec $z\neq 0$. Soit $(\mathscr{D})_{a,b}$ la droite d'quation $y=ax+b$ où a et b sont des réels avec $a\neq 0$.
   (a) Ecrire x et y en fonction de x' et y'. 0.5pt
   (b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'image par f de $(\mathscr{D})_{a,b}$ lorsque $b\neq 0$. 0.5pt
   (c) Quelle est l'image par f de $(\mathscr{D})_{a,0}$? 0.25pt
   (d) Que peut on conclure ? 0.5pt

t.me/KamerHighSchool

Problème

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

L'espace est muni du repère orhtonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit m un réel et S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2+z^2-2mx-2(m-1)y-2(m+1)z+1=0$.

1. Montrer que S_m est une sphère dont on précisera le centre Ω_m et de rayon R_m. 0.5pt
2. Quel est le lieu des points Ω_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}$? 0.5pt
3. Soit le plan (P) : $x+2y+2+\sqrt{5}=0$
   (a) Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer les coordonnées du point H_m projété orthogonal de Ω_m sur le plan (P). 0.5pt
   (b) Déterminer suivant les valeurs de m la nature et les éléments caractéristiques de $(P)\cap S_m$. 0.75pt
4. Montrer que toutes les sphères S_m passent par un cercle fixe situé dans le plan $(Q): x+y+z=0$. 0.75pt
5. Déterminer les équations des plan (Q_1) et (Q_2) qui sont parallèles à (Q) et tangents à S_{-1}. 0.5pt
6. Déterminer la distance entre les plans (Q_1) et (Q_2). 0.5pt

PARTIE B

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2-x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

On note $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ $0.5pt$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ 0.25pt
3. Déterminer les branches infinies de la de la représentation graphique de f . 0.5pt
4. (a) Calculer $f'(x)$, puis $f'(0)$ 0.5pt
   (b) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)<0$, puis dresser le tableau de variation de f . 0.5pt
5. (a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\alpha\in[2,3]$ 0.5pt
   (b) Donner par une méthode de votre choix un encadrement de α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2} 0.5pt
   (c) Déminer le signe de f sur $\mathbb{R}$ 0.25pt
6. Construire $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ 0.75pt
7. On admet que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $f(2)$, puis le nombre dérivé de f^{-1} en $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 0.5pt
8. Soit la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x)=2+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
   (a) Montrer que $h(\alpha)=\alpha$ 0.25pt
   (b) Montrer que $\forall x\in[2,3]$, on a : $|h'(x)|\leq\frac{1}{2}$ 0.25pt
   (c) Montrer que $\forall x\in[2,3]$, on a : $|h(x)-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x-\alpha|$. 0.25pt
9. Donner la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 2 en 0. 0.5pt