Lycée Bilingue de Yaoundé
1re séquence **Devoir de Mathématiques**
Classe de Terminale C **Durée 2 h**

Exercice 1

1°) Soit x un nombre réel non-multiple de 2π. Démontrer par récurrence que pour tout entier n non-nul,

$$T_n = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\left[\frac{(n+1)}{2}x\right]\sin\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2°) Calculer $T_n \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
En déduire T_n.

Exercice 2

Soit n et p deux entiers naturels tels que : $n = \lambda p$, où $\lambda \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que si p est un entier multiple de λ alors $p^2 \equiv 0 \ (n)$.

b) Montrer que si p n'est pas un entier multiple de λ alors $p^2 \equiv p \ (n)$.

Exercice 3

On considère le plan affine euclidien $\mathscr{P}$.

1°) Soient A, B et C trois points de $\mathscr{P}$ tels que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2°) Construire G barycentre du système $\{(A, 2), (B, 3), (C, 3)\}$.

3°) Soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$ associant à tout point M le réel :
$f(M) = 2\,\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

a) Démontrer que pour tout point M de $\mathscr{P}$, $f(M) = f(G) + 4MG^2$.

b) Calculer f(A) et f(G).

4°) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M de $\mathscr{P}$ tels que $f(M) = f(A)$.

Exercice 4

1°) Soit n un entier naturel.
Démontrer par récurrence que : $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.

2°) Soit n un entier naturel.

a) Déterminer le reste de la division par 5 de 7^n en fonction des valeurs de n.

b) Déterminer suivant les valeurs de n le reste de la division par 5 de 3^n.

c) Déterminer les entiers n tels que $7^n + 3^n \equiv 0 \ (5)$.

BONNE CHANCE