Ministère des enseignements secondaires **Examen:** Séquence 2. **Session:** Novembre 2018.
Lycée bilingue SIN de Foumban **Classe:** Tle C. **Durée:** 4 heures. **Coeff:** 5.
Département de mathématiques **Par: EFOUBA E. R. et NJIEMESSA M.**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

L'épreuve comporte trois exercices et un problème à deux parties indépendantes.

Exercice 1: /4 points

On considère l'équation $(E) : x^2 - 5y^2 = 1$ où les inconnues x et y sont des entiers strictement positifs.



1. On suppose que $(x_0; y_0)$ est une solution de (E).
   (a) Montrer que x_0 et y_0 n'ont pas la même parité. [0,5pt]
   (b) Démontrer qu'il existe un entier k tel que $x_0 = 5k + 1$ ou $x_0 = 5k - 1$. [0,5pt]
   (c) Calculer $1 + 5y^2$ pour $y = 4$ et en déduire un couple $(x_0; y_0)$ solution de (E). [0,5pt]
2. On suppose que, pour tout entier naturel non nul n, il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que $(9 + 4\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$.
   (a) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. [0,5pt]
   (b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel non nul n, $(a_n; b_n)$ est solution de (E). [0,75pt]
   (c) Montrer que $\dfrac{1}{a_n + b_n\sqrt{5}} = a_n - b_n\sqrt{5}$ et en déduire que, pour tout entier non nul n, $(9 - 4\sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$. [0,75pt]
   (d) En déduire a_n et b_n en fonction de n. [0,5pt]

Exercice 2: /3 points

Dans l'espace on considère le tétraèdre $ABCD$ d'arête a. A' est l'isobarycentre du triangle BCD.

1. (a) Déterminer m pour que G, milieu de $[AA']$, soit le barycentre du système: $\{(A, m); (B, 1); (C, 1); (D, 1)\}$. [0,25pt]
   (b) Montrer que $GA^2 = \dfrac{a^2}{6}$ et $GB^2 = \dfrac{a^2}{2}$. [0,75pt]
2. On considère l'ensemble (Π) des points M de l'espace tels que: $6MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 + 2MD^2 = 10a^2$.
   (a) Montrer que $B \in (\Pi)$. [0,25pt]
   (b) Déterminer l'ensemble (Π). [0,5pt]
3. Montrer l'ensemble (Ω) des points M tels que: $-3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = -a^2$ est le plan (BCD). [0,75pt]
4. En déduire l'intersection (C) de (Π) et (Ω). [0,5pt]

Exercice 3: /3 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = z^2 - 4z$.

1. Calcule l'affixe a' de A' image de $A(3 - i)$ par f. [0,25pt]
2. Démontrer que si deux points ont la même image par f alors l'un est le symétrique de l'autre par rapport à un point que l'on précisera. [0,5pt]
3. Soit I le point d'affixe -3.

(a) Démontrer que si $OMIM'$ est un parallélogramme alors $z^2 - 3z + 3 = 0$. [0,5pt]

(b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$. [0,5pt]

4. (a) Exprimer $z' + 4$ en fonction de $z - 2$. [0,25pt]

   (b) En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ et entre $arg(z'+4)$ et $arg(z-2)$ [0,5pt]

5. Soit J et K les points d'affixes respectifs $z_J = 2$ et $z_K = -4$.
   Démontrer que les points M qui sont sur le cercle de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un cercle que l'on déterminera. [0,5pt]

Problème: /10 points

Partie A: /5,5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) d'unité un centimètre. f est la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{-\sqrt{|x-2|}}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f et écrire les expressions de $f(x)$ sans symbole de valeur absolue. [0,75pt]

2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f. [0,75pt]

3. Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point d'abscisse $x_0 = 2$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus. [0,75pt]

4. (a) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle de D_f. [1pt]

   (b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$ puis dresser son tableau de variations. [0,75pt]

5. (a) Etudier les branches infinies à la courbe (C_f) de f vers $-\infty$ puis vers $+\infty$. [0,5pt]

   (b) Construire l'allure de la courbe (C_f). [0,5pt]

6. On considère l'équation $(E) : \sqrt{|x-2|} + mx = 0$ où m est un paramètre réel.
   Discuter graphiquement, suivant les valeurs de m, l'existence et le nombre de solutions de (E). [0,5pt]

Partie B: /4,5 points

g est la fonction numérique définie par: $g(x) = \dfrac{x + cosx}{sinx}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de g. [0,25pt]

2. En déduire le sous ensemble E de définition de la restriction de la fonction g sur l'intervalle $]-\pi; \pi[$. [0,25pt]

3. Dans cette question l'objet est l'étude de g sur E.

   (a) Calculer les limites de g aux bornes de E. [1pt]

   (b) Démontrer que $g'(x) = \dfrac{sinx - xcosx - 1}{sin^2x}$ et démontrer que l'unique solution de l'équation $g'(x) = 0$ sur E est $\dfrac{\pi}{2}$. [1pt]

   (c) Dresser le tableau de variations de g. [0,5pt]

   (d) En utilisant la méthode par dichotomie, démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution a sur $]-\pi; 0[$ et donner son encadrement à 10^{-1} près. [0,75pt]

   (e) Construire sur E l'allure de la courbe (C_g) de g (prendre $\pi \simeq 3$). [0,75pt]