LYCEE DE BEPANDA Année scolaire 2009/2010
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

EVALUATION DE LA 4^{e} SEQUENCE

Classe : Tle D coef : 4 Durée : 4 Heures Date :Jeudi 04/03/2010

L´épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux page . La présentation et la rigueur de la rédaction seront prises en compte dans l´appréciation de la copie de chaque élève

EXERCICE 1 / 4pts

L´objectif de cet exercice est de résoudre une équation différentielle et de déterminer l´une de ses solutions sous une condition donnée .

On considère l´équation différentielle suivante :

(E) : ý +2y = x+1

On pose F(x) = $\int_{-1}^{x} e^{2t}(t+1)dt$

1) A l´aide d´une intégration par parties, calculer F(x) (1pt)

2) Pour tout nombre réel x, on pose S(x) = g(x)e^{-2x} où g est une fonction dérivable de IR vers IR .

a) Montrer que si la fonction S est solution de (E), alors pour tout réel x de IR,

g´ (x) = e^{2x} $(x+1)$ (0,5pt)

b) Réciproquement, montrer que si g vérifie cette relation, alors S est solution de (E). (0,5pt)

c) En utilisant la question 1), déterminer toutes les fonctions g vérifiant pour tout x ϵ IR

g´ (x) = e^{2x} $(x+1)$ (0,75pt)

3) a) En deduire alors que les solutions de (E) sont les fonctions qui à :

x $\rightarrow \frac{1}{4}(2x+1) + \frac{1}{4}e^{-2-2x} + ke^{-2x}$ où k est une constante réelle . (0,75pt)

b) Déterminer la solution de (E) pour laquelle l´image de 0 est $\frac{1}{4}$. (0,5pt)

EXERCICE 2 / 6pts

Cet exercice comprend deux parties indépendantes I et II

I – Soient P la fonction polynôme de C dans C définie par :

P (z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8 et l´équation (E) : P(x) = 0

1) Montrer que si un élément z_0 est un zéro de P, alors $\overline{z_0}$ est aussi un zéro de P. (0,5pt)

2) Calculer P(i) et en déduire que (E) admet deux solutions imaginaires pures que l´on déterminera. (0,25 + 0,5pt)

3) Donner l´écriture de P en un produit de facteurs de second degré et en déduire les solutions de (E). (0,75 + 0,5pt)

II – Sur le marché d´un certain bien, la demande le mois n est donnée par :

$D_n = 5p_n - 30$, où p_n est le prix du bien le mois n avec $p_1 = 15$. L´offre de ce même bien le mois n+1 est donné en fonction de p_n par la relation $S_{n+1} = p_n - 14$. On dit que le marché est en équilibre pour un mois donné, lorsque l´offre est égale à la demande pendant tout ce mois.

1) Montrer que lorsque le marché est en équilibre, pour tout entier n, on a :

$p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{16}{5}$ (0,75pt)

2) On souhaite étudier l´évolution de la suite $(p_n)_{n\epsilon N}$ lorsque le marché est en équilibre chaque mois. Pour cela, on considère la suite auxiliaire $(u_n)_{n\epsilon N^*}$ définie par : $u_n = p_n - 4$

t.me/KamerHighSchool

a) Montrer que $(u_n)_{n\varepsilon N^*}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et sa raison. (0,5 + 0,25pt x 2pt)

b) En déduire que $u_n = 11\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ pour tout n≥1. (0,5pt)

c) Exprimer p_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite $(p_n)_{n\varepsilon N}$. (0,25 x 2pt)

d) Déterminer le plus petit entier n pour lequel on a : $|p_n - 4| \leq 10^{-3}$. Quelle interprétation pouvons-nous donner à ce résultat ? (0,5+0,25pt)

PROBLEME / 10pts

Dans tout ce problème , f désigne la fonction de la variable réelle x définie de IR vers IR par : $f(x) = (x+1)(e^{-2x}+1)$ On désigne par (c_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) d´unité 1cm sur les axes .



PARTIE A : ETUDE ET TRACE DE LA FONCTION f

1) Soit g, la fonction définie de IR vers IR par : $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$.
Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de IR. (2pts)

2) Monter que pour tout x de IR la dérivée de f , $f'(x) = e^{-2x} g(x)$. (0,5pt)

3) En déduire de 1) le sens de variation de f et dresser son tableau de variation. (1pt)

4) a- Calculer : $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation graphique du résultat. (0,75pt)

b- Montrer que la droite (d) : y = x + 1 est une asymptote oblique à (c_f). (0,5pt)

c- Etudier les positions relatives de (d) et (c_f). (0,25pt)

d- Tracer (d) et (c_f) dans le repère. (1pt)

5) On désigne par h la restriction de f à l´intervalle] - ∞ ; 0 [.
a- Justifier que h est une bijection de] - ∞ ; 0 [sur]- ∞ ; 2 [(0,5pt)
b- Dresser le tableau de variation h^{-1}, puis tracer sa courbe dans le même repère que (c_f).(h^{-1} est la bijection réciproque de h). (1pt)

PARTIE B : CALCUL D´AIRE

On pose pour tout nombre réel α ≥ -1, $A_\alpha = \int_{-1}^{\alpha} (x+1)e^{-2x}dx$.

1) A l´aide d´une intégration par parties, évaluer A_α . (0,75pt)

2) Soit D_α , le domaine du plan délimité par la courbe (c_f), la droite (d) et les droites d´équations x = -1 et x = α .

a- Déduire de la question 1), l´aire notée $A(\alpha)$ du domaine D_α . (0,75pt)

b- Montrer que $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha) = \frac{e^2}{4}$ cm² (0,5pt)

c- On suppose que 2,718 < e < 2,719. Donner un encadrement de $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$ à 10^{-3} près. (0,5pt)

t.me/KamerHighSchool