

Classe : *TleD* Durée : 4h ; coef : 4
Jeudi, 19 Novembre 2009 8h-12h
Epreuve de Mathématiques. 2^{ème} séquence

L'épreuve comporte deux exercices et un problème.



Exercice 1 (5,5pts).

1. Linéariser $\sin^5 x$ [1pt]
2. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $z = -8 + 6i$. [0,75pt]
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (3 + 5i)z - 2 + 6i = 0$. [0,75pt]
4. Pour tout nombre complexe z , on pose : $f(z) = z^3 - (3 + 7i)z^2 - 12(1 - i)z + 12 + 4i$
 - (a) Montrer qu'il existe un nombre imaginaire pur z_0 tel que $f(z_0) = 0$. [0,5pt]
 - (b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $f(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ [0,5pt]
 - (c) Dédire les solutions de l'équation : $f(z) = 0$ [0,5pt]
5. Soient les points A , B et C , d'affixes respectives : $z_A = 2i$, $z_B = 1 + i$, et $z_C = 2 + 4i$.
 - (a) Calculer le module et un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. [1pt]
 - (b) En déduire la nature du triangle ABC . [0,5pt]

Exercice 2 (4,5pts).

Soit $(E) : z^5 = 1 ; z \in \mathbb{C}$

1.
 - (a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$ et représenter les images des solutions dans un cercle trigonométrique. [1pt]
 - (b) Montrer que la somme des solutions de (E) est nulle. [0,5pt]
 - (c) Montrer que $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$. [1pt]
2. On considère $(E') : 4x^2 + 2x - 1 = 0$.
 - (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$. [0,5pt]
 - (b) Montrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est solution de (E') . [1pt]
 - (c) Résoudre (E') et en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{2\pi}{5}$. [0,5pt]

PROBLEME(10pts)



Ce problème comporte 3 parties indépendantes A,B,C.

Partie 1 (A).

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{1+x}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer les dérivées première et seconde de g sur $[0, +\infty[$. [0,5pt]
2. Vérifier que $\forall x \in [0, a], \frac{1}{2\sqrt{1+a}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$. [0,5pt]
3. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g sur $[0, a]$; démontrer que :
 $1 + \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \leq \sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2}$. [0,5pt]

Partie 2 (B).

Soit $h(x) = -x + \sqrt{x^2 + 8}$.

1. Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ de h admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et une asymptote oblique en $-\infty$ que l'on déterminera. [0,5+0,75pts]
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x - \sqrt{x^2 + 8} > 0$. [0,5pt]
(b) Calculer la dérivée $h'(x)$ et en déduire les variations de h . [0,75pt]

Partie 3 (C).

I– Soit $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.

1. Etudier les variations de P . [1pt]
2. Montrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -1, +\infty[$; et que $1,6 < \alpha < 1,7$. [0,5pt]
3. Déduire suivant les valeurs de x , le signe de $P(x)$.

II– Soit $D =] -1, +\infty[$. On définit la fonction f de D vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$.

1. Etudier les variations de f . [1pt]
2. Montrer que $-0,118 < f(\alpha) < -0,117$. [0,5pt]
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse $x_0 = 0$. [0,5pt]
(b) Etudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de la droite (T) pour x élément de $] -1, 1[$. [0,5pt]
4. Prouver que $(\mathcal{C}_f)$ est située au-dessus de la droite (d) tangente au point d'abscisse $x = 1$. [0,5pt]
5. Construire $(\mathcal{C}_f)$, (T) et (d) dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité $4cm$. [1pt]