Etablissement	Discipline	Coeff	Durée	Classe	Evaluation	Année-scolaire
Lycée de Béka-Hosseré	Mathématiques	4	4H	Tle D	No 4	2019 - 2020

Exercice 1 **5pts**

I- On se propose de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E): $y' + y = x - 1$

1- A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^x e^t(t-1)\,dt$ 0,5pt

2- Soit z une fonction dérivable sur l'ensemble sur l'ensemble R des nombres réels.

On pose $f(x) = z(x)e^{-x}$.

a) Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = e^x(x-1)$ 0,5pt

b) A l'aide de la question 1, détermine toutes les fonctions z vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ z'(x) = e^x(x-1)$ 0,5pt

3- a) Déduire des questions précédentes les solutions de (E) 0,5pt

b) Détermine la solution g de (E) qui prend la valeur 0 en 1 . 0,5pt

II- Soit un entier naturel n, on considère les intégrales $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ et $J = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 + x)e^x dx$

1- Montrer que $I_0 = 1 - e^{-1}$ 0,5pt

2-a) A l'aide d'une intégration par parties, Montrer que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ 0,75pt

b) Déduire les valeurs de I_1, I_2 et I_3 0,75pt

3- En déduire la valeur exacte de J 0,5pt

Exercice 2 **4pts**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient A, B et C les points d'affixes respectifs 3, 2i et 2+5i s la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

1- Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = (1-i)z + 3i$, puis déterminer l'angle de s. 1pt

2- Soit D l'image de C par s. Détermine l'affixe de D. 0,5pt

3- Quelle est la nature du triangle ACD ? 0,5pt

4- En déduire une équation du cercle circonscrit au triangle ACD 0,5pt

5- Soit l'application qui a tout nombre complexe z différent de -2 associe $f(z) = \frac{z-2+i}{z+2i}$

a)On pose $z = x + iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et y . 1pt

b) En déduire la nature de l'ensemble (Σ) des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit réel. 0,5pt

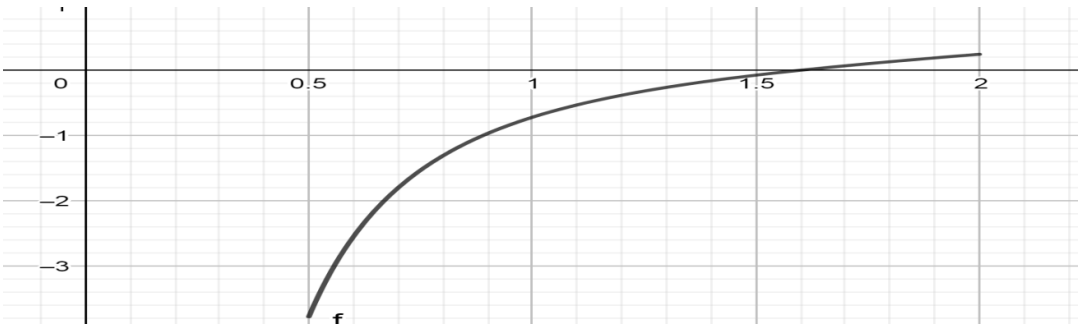
Problème (11pts)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$

Partie A (recherche graphique d'un extremum) **1,25pt**

L'observation de la courbe représentative de la fonction f laisse à penser que f admet un minimum sur l'intervalle [0,5 ; 2]. On se propose de donner une valeur approchée.

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' de f sur [0,5 ; 2].



1-Quels sont les éléments graphiques concernant f' qui vont dans le sens de l'existence d'un minimum de f sur [0,5 ; 2]. 0,5pt

2- Donner un encadrement d'amplitude 0,2 de l'abscisse de ce minimum grâce à ce graphique 0,75pt

t.me/KamerHighSchool

Partie B (Étude de la fonction f) **5,25pts**

On considère la fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = xe^x - 2e^x + 2$

1- Déterminer les variations de h 0,75pt

2- a)Déterminer le signe de $h\left(\frac{3}{2}\right)$, en déduire qu'il existe un unique réel α appartenat à l'intervalle $\left[\frac{3}{2};2\right]$ tel que $h(\alpha) = 0$, 0,75pt

b) en déduire le signe de h sur $[0;+\infty[$ 0,5pt

3- Étude de la fonction f

a) Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$ 0,75pt

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$ 0,75pt

c) Déduire son sens de variation et dresser son tableau de variation 1pt

d) Montrer que $f(\alpha) = \frac{-1}{\alpha(\alpha-2)}$ et déduire le signe de $f(\alpha)$ 0,75pt

Partie C (Recherche d'un encadrement du nombre α) **3pts**

1- Démontrer que, sur $[0;+\infty[$, l'équation $h(x) = 0$ équivaut à $2(1-e^{-x}) = x$ 0,5pt

2- Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = 2(1-e^{-x})$. On pose I $= \left[\frac{3}{2};2\right]$.

Montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ 0,75pt

3- Soit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, définie par $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = g(x_n)\ n \geq 1 \end{cases}$

On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $x_n \in I$

a) Démontrer que $n \geq 1$, $|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x_n - \alpha|$ et $|x_n - \alpha| \leq (1/2)^n|x_1 - \alpha|$ 0,75pt

b) Déduire que la suite (x_n) converge vers α 0,25pt

c) Déterminer un entier p tel que x_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près du nombre réel α.

Donner une valeur approchée de x_p avec 3 décimales. 0,75pt

Partie D (Quelques propriétés d'une primitive de f) **1,5pt**

On appelle F la primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$ qui s'annule en 1. Ainsi on a :

$\forall x \in]0;+\infty[$, $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

1- Étudier le sens de variation de F sur $]0;+\infty[$ 0,75pt

2- Démontrer que pour tout $x \geq 2$ $\int_2^x f(2)\,dt \leq \int_2^x f(t)\,dt$ et déduire la limite de F en $+\infty$ 0,75pt

Proposée par *M. DONGMO*