MINISTERE DES ENSEIGNEMENTS SECONDAIRES
LYCEE DE BATIE

ANNEE SCOLAIRE 2019-2020
Classe : Tle D Durée: 4h
COEF : 4
Evaluation: Janvier 2020

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

L'épreuve comporte deux exercices indépendants 1, 2 et un problème. La clarté dans la rédaction sera prise en compte par le correcteur.

EXERCICE1 : (04 points)

Soit la suite (u_n) définie sur IN par $u_0 = 2 \ et \ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1/ a. Montrer par récurrence sur IN que pour tout $n \in IN, u_n \leq n + 3$. **1 pt**

b. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$. **0,5 pt**

c. En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante sur IN. **0,5 pt**

2/ On considère la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique ; déterminer son premier terme et sa raison. **0,5pt**
b. Exprimer $v_n \ puis \ u_n$ en fonction de n. **1 pt**
c. Déterminer la limite de u_n. **0,5pt**

EXERCICE2 : (05 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -11 + 4i$, $z_B = -3 - 4i$ et $z_C = 5 + 4i$. ***0,75pt***
2. Calculer le module et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC. ***1pt***
3. Soit E l'image du point C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   Montrer que $z_E = -3 + (8\sqrt{2} - 4)i$. Placer le point E dans le plan. ***1pt***
4. Soit D l'image de E par l'homothétie de centre et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Vérifier que l'affixe de D est égale $\overline{z_B}$ puis montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Placer le point D. ***1,25pt***
5. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 16$.

   1pt

t.me/KamerHighSchool

Problème 11 pts

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^x - 1$

1) Etudier les variations de g
2) Calculer $g(0)$. En déduire que pour tout $x \neq 0$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + 2 \ \ si \ x \neq 0 \\ f(0) = 3 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm).

On admettra que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$
   b) Etablir que $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{1 - e^{-x}}$ puis déterminer la limite de f en $+\infty$
   En déduire que (C) admet une asymptote horizontale en $+\infty$ dont on donnera l'équation.
2) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$
3) Calculer, pour tout $x \neq 0$, $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.
4) a) Donner le sens de variation de f
   b) Dresser le tableau de variation de f
5) Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse nulle, écrire l'équation de (T)
6) Tracer (D), (T) et (C).

Partie C

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$

1) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]2\ ;\ 2{,}5[$
2) On pose $I = [2\ ;\ 2{,}5]$
   a) Démontrer que pour tout $x \in I$, on a : $g(x) \geq -20$ et $(e^x - 1)^2 \geq 40$
   b) En déduire que si $\in I$, $-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$.
3) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n \in I$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
   c) En déduire que (U_n) converge vers α.
   d) Déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $|U_n - \alpha| \leq 10^{-3}$

On donne : $\ln 2 \simeq 0{,}69$; $\ln 10 \simeq 2{,}3$; $e^2 \simeq 7{,}39$; $e^{2{,}5} \simeq 12{,}18$; $\frac{1}{e^2 - 1} \simeq 0{,}15$;

$$\frac{1}{e^{2{,}5} - 1} \simeq 0{,}09 \ ; \ (e^2 - 1)^2 \simeq 40{,}83 \ ; \ (e^{2{,}5} - 1)^2 \simeq 125$$

t.me/KamerHighSchool