LYCÉE DE BANGOULAP

Évaluation de la Deuxième séquence

Classe :	TERMINALE C	Durée :	4 heures	Année scolaire :	2018/2019
Épreuve :	MATHÉMATIQUES	Coef. :	5	Par	DJOUTSOP Emile

Épreuve de Mathématiques

EXERCICE 1: (05 points)

Les parties I et II sont indépendantes. Le plan est muni du repère orthonormé $(0;\vec{u},\vec{v})$.

I. Soit $\theta \in [0;\pi[$.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2+2(1-\cos\theta)z+2-2\cos\theta=0$. 0,75 pt

2- Soit z_1 la solution de (E) dont la partie imaginaire est négative et z_2 l'autre solution. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes z_1 *et* z_2.

a) Déterminer l'écriture exponentielle de z_1 *et* z_2. 0,75 pt

b) En déduire la nature du triangle OM_1M_2. O,25 pt

c) Pour quelles valeurs de θ, le triangle OM_1M_2 est équilatéral ? 0,5 pt

II. 1- Déterminer quatre entiers naturels a, b, c *et* d inférieurs à 5 tels que $\frac{142}{5^3}=a+\frac{b}{5}+\frac{c}{5^2}+\frac{d}{5^3}$. 0,75pt

2-Soit $n\in\mathbb{N}/n\geq 2$, démontrer par récurrence que $\sum_{k=2}^{n} k(k!)=(n+1)!-2$. 0,75 pt

3- On donne $A=\frac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n+2)}$, montrer que (n+2) divise (2n-1) si et seulement si (n+2) divise 5. 0,75 pt

4- On donne $E=\{n\in\mathbb{N}/\overline{ababab};\ a\neq 0\}$ avec $a;b\in\{0,1,...,9\}$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, n est un multiple de 10101. 0,5 pt

EXERCICE 2: (05 points)

1- Déterminer le pgcd de 2688 et 3024 0,25 pt

2- Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

a) Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes.
(1) 2688x + 3024y = -3360 et (2) 8x +9y = -10 0,25 pt

b) Vérifier que (1 ; -2) est une solution particulière de l'équation (2). 0,25 pt

c) Déduire de ce qui précède les solutions de (2). 0,5 pt

3- Soit $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace. On considère les plans (P) *et* (Q) d'équations respectives : $x+2y-z=-2$ *et* $3x-y+5z=0$.

a) Montrer que les plans (P) *et* (Q) se coupent suivant une droite (D). 0,75 pt

b) Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2). 0,25 pt

c) En déduire l'ensemble (E) des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs. 0,5 pt

4- On désigne par A le point de l'espace de coordonnées (1 ; 0 ; 1). Montrer A n'appartient pas au plan (P), puis calculer la distance de A à (P). 0,5 pt

https://t.me/KamerHighSchool

5- On désigne par S l'ensemble des points M de l'espace dont les coordonnées $(x;y;z)$ sont liées par la relation $x^2+y^2+z^2-2x-2z-2=0$.

a) Prouver que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon r. 0,75 pt

b) Étudier l'intersection $S\cap(P)$ de la sphère S et du plan (P). 1 pt

PROBLEME : (10 points)

PARTIE A : (05,25 points)

On considère la fonction $f: x\mapsto \frac{3}{4}\sqrt{\left|-x^2+4x+12\right|}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j})$.

1- Déterminer le domaine de définition de f puis écrire $f(x)$ sans barre de valeur absolue.

2- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition. 0,5 pt

3- Étudier les branches infinies de f et déterminer si possible leurs équations 1 pt

4- Étudier la dérivabilité de f en -2 et en 6 puis donner une interprétation des résultats obtenus. 1 pt

5- Étudier les variations de f et dresser le tableau de variations de f. 1 pt

6- Construire (C_f) ainsi ses demi-tangentes. 1 pt

PARTIE B : (04,75 points)

Nous admettons qu'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant : $\begin{cases} f(0)=0 \\ \forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \end{cases}$.

1. Parité

a. Montrer que la fonction $g: x\mapsto f(x)+f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée . 0,5pt

b. Calculer $g(0)$ et en déduire la parité de f. 0,25×2=0,5pt

2. Limite en $+\infty$

a. Montrer que la fonction $h: x\mapsto f(x)+f(\frac{1}{x})$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer sa dérivée. 0,5pt

b. En déduire qu'il existe une constante c telle que, pour tout $x>0$, $f(x)=c-f(\frac{1}{x})$. 0,25pt

c. Prouver alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$. 0,25pt

3. On considère la fonction u définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $u(x)=tanx$.

a. Montrer que la fonction $t: x\mapsto (f\circ u)(x)-x$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée. 0,5pt

b. Calculer $t(0)$ et en déduire que pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f(tanx)=x$. 0,5pt

c. Calculer la valeur exacte de $f(1)$, $f(\sqrt{3})$ et $f(\frac{1}{\sqrt{3}})$ ainsi que la valeur exacte de c. 0,5pt

4. a. Étudier le sens de variation f sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation. 0,5pt

b. À l'aide des renseignements précédents, tracer la courbe (C) de f.
On précisera les asymptotes et la tangente à l'origine. 0,75pt

https://t.me/KamerHighSchool