Lycée de Bahouan
Département de Mathématiques
Année scolaire 2019-2020

Devoir N° 4
Tle C
Durée : 4h

Epreuve de Mathématique Février 2020 (20pts) Coef : 5

Exercice (4,5pts)

Soient les ensembles (E_1) et (E_2) définis par $(E_1) : 13x^2 + 13y^2 - 10xy - 72 = 0$ et $(E_2) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ et f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ telle que

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une application linéaire. (0,5pts)
2. Montrer que f est bijective et déterminer l'expression analytique de sa bijection réciproque. (0,5pt)
3. Etude de l'ensemble (E_2)
   a) Donner la nature de (E_2). (0,25pt)
   b) Calculer son excentricité. (0,5pt)
   c) Déterminer les équations des tangentes à la courbe de (E_2) aux points d'abscisse $x_0 = 1$. (0,75pt)
4. Etude de l'ensemble (E_1)
   a) Déterminer l'écriture complexe puis l'expression analytique de la rotation r de centre $O(0; 0)$ et d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. (0,5pt)
   b) Déterminer l'équation cartésienne de l'image de (E_1) par la rotation r ci-dessus. (0,5pt)
   c) Déduire la nature de (E_1), son axe et les coordonnées des sommets situés sur le grand axe. (1)

Exercice (4,5pts)

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A.

Soit (u_n) une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$. (1pt)

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \quad pour\ n \geq 2 \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - \ln n \quad \text{pour } n \geq 1$$

1. Calculer u_2 et u_3. (0,5pt)
2. Montrer que :
   a) Pour tout entier naturel n non nul : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. (0,5pt)
   b) Pour tout entier naturel k non nul : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$. (0,25pt)
   c) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a les inégalités suivantes : $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ et $0 \leq v_n \leq 1$. (1pt)
3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ puis déduire les variations de la suite (v_n). (0,75pt)
4. Montrer que la suite (v_n) converge. On note γ la limite de (v_n) (on ne cherchera pas à calculer γ). Quelle est la limite de la suite (u_n) ? (0,5pt)

Problème (11pts**)**

La partie D est indépendante des parties A, B et C qui sont liées.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$ de courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A. Etude d'une fonction auxiliaire g. (3pts)

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x} + 1$.

1. Etudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. (1pt)
2. Calculer rapidement la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$ puis dresser le tableau de variation de g. (0,75pt)
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution nulle et une autre solution α dont on donnera un encadrement à 10^{-1} prés. (0,75pt)
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. (0,5pt)

Partie B. Etude de la fonction f. (3,5pts)

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. (0,5pt)
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ de f et dresser le tableau de variation de f. On pourra se servir de la question 4 de la partie A. (0,75pt)
3. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$,est asymptote à la courbe (C). (0,25pt)
4. Montrer que la droite (D) et la courbe (C) se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées. Déduire la position relative de la droite (D) et de la courbe (C). (1pt)
5. Construire la droite (D) et la courbe (C). (1pt)

Partie C. Calculs d'aire. (2pts)

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Déterminer les réels a, b et c pour que H soit une primitive de la fonction h définie par : $h(x) = (x^2 + 4x + 3)e^{-x}$. (0,5pt)
2. Déterminer l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan fermée limitée par la courbe (C) et la droite (D). (0,5pt)
3. Soit m un réel strictement supérieur à -1. On considère le domaine (D_m) délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = m$.
   a) Calculer l'aire (A_m) du domaine (D_m). (0,5pt)
   b) Déterminer la limite de (A_m) lorsque m tend vers $+\infty$. (0,5pt)

Partie D (2,5pt)

La question 3 est indépendante.

Soit n un entier naturel, on pose $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$.

1. Calculer I_n à l'aide de deux intégrations par parties successives et montrer que : $I_n = (-e^{-\pi})^n \left(\frac{1+e^{-\pi}}{2}\right)$. (0,5pt)
2. Montrer que la suite I_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme puis calculer $S_n = I_0 + I_1 + \cdots + I_{n-1}$. (1pt)
3. On donne les points $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ et $C(0; 0; 2)$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques du lieu de rencontre entre le plan ABC et la sphère de centre $D(1; 1; 1)$ et de rayon $R = 2cm$. (1pt)