Ministère des Enseignements Secondaires **Examen : Séquence 4**
DRES :Ouest\ DDES :Menoua\ Lycee de Bafou-Sud **Classe : T^{le} Série : C**
Année scolaire 2018-2019 **Durée : 4h Coef : 6**

Epreuve de Mathématiques

(*L'épreuve comporte deux exercices et un problème répartis sur deux pages. La qualité de la rédaction et le soin apporté au tracé des figures seront pris en compte dans l'évaluation de la copie du candidat.*)

Exercice 1 [6 points]

I- 1) Déterminer les entiers naturels x et y tels que : $8x+9y=-10$ **[0,75 pt]**

2) Pour tout entier naturel n, on pose : $A_n = n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$

(a) Déterminer les restes de la division par 9 du nombre 4^n où n est un entier quelconque. **[0,5 pt]**

(b) Déduire suivant les valeurs de n, que $A_n \equiv 0[9]$. **[0,75 pt]**

II- Un sac contient deux jetons ; sur l'un est inscrit le nombre 2 et sur l'autre le nombre -3. On tire trois fois de suite un jeton de l'urne en le remettant dans celui-ci à chaque fois, après avoir noté le nombre qui y est inscrit. Si a, b et c désignent les nombres obtenus dans cet ordre, au triplet (a,b,c), on associe l'équation dans $\mathbb{C}$: $az^2+bz+c=0$. On suppose tous les triplets ont la même probabilité d'être obtenus

1) Quelle est la probabilité pour que cette équation admette deux solutions réelles ? **[0,5 pt]**

2) Soit X(respectivement Y) la variable aléatoire réelle, qui à chaque triplet obtenu, associe la somme (respectivement le produit) dans $\mathbb{C}$ des solutions de cette équation. Déterminer les lois de probabilité de X et de Y. En déduire l'espérance mathématiques de $X+Y$. **[2,5pt]**

3) Dans cette question on repète n fois l'expérience décrite ci-dessus.

(a) Calculer la probilité p_n pour que l'équation $az^2+bz+c=0$, ait aucours de ces répétitions aumoins une fois, deux solutions complexes, non rélles, et dont les images M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'origine O du plan complexe ? **[0,5pt]**

(b) Déterminer n pour que $p_n > 0,9$. **[0,5pt]**

Exercice 2 [4 points]

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de sens direct et de centre O. On désigne par r le quart de tour direct de centre A ; t la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, h l'homothétie de centre C et de rapport $-\sqrt{3}$.

1. (a) Prouver que $r' = tor$ est une rotation dont on précisera l'angle. **[0,5pt]**

(b) Déterminer les images de A et B par r'. En déduire le centre de r' **[0,75pt]**

2. On se propose d'étudier la transformation $f = r'oh$

(a) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport. **[0,5pt]**

(b) Soit I le centre de f. Déterminer l'image de C par f. Prouver que $mes(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{ID}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et que $ID = \sqrt{3}IC$. **[0,5pt]**

(c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $mes(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2]$. **[0,5pt]**

(d) Donner une mesure de l'angle $mes(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CI})$. Placer I sur la figure. **[0,5pt]**

(e) Prouver que l'ensemble (Γ') des points M du plan tels que $MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire (Γ'). **[0,75pt]**

https://t.me/KamerHighSchool

Problème [10 points]

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$. On considère l'application f qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ tels que : $\begin{cases} x' = \frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{13}{5}, \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{6}{5} \end{cases}$



1. Déterminer l'expression complexe de f montrer que f est une isométrie négative. **[0,75 pt]**
2. Déterminer l'ensemble des points invariants de f et donner la nature exacte de f. **[0,5 pt]**
3. Déterminer fof. En déduire les éléments caractéristiques de f ; **[1 pt]**

Partie B

Le plan muni d'un repre orthonormé $(0,I,J)$ (unité graphique : $2cm$) (C_f) est la courbe représentative de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + xln(1-x) \text{ si } x < 0, \\ f(x) = u(x) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

Où u est une fonction numérique solution de l'équation différentielle $u'' + 2u' + u = 0$ et dont la courbe representative admet au point $A(0,1)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Les parties** I, II **et** III **sont dépendantes.

I- Soit la fonction g définie sur $]-\infty;1[$ par : $g(x) = ln(1-x) + \dfrac{x}{x-1}$

(1) Dresser le tableau de variations de la fonction g **[0,5 pt]**

(2) Calculer $g(0)$ puis déduire que pour tout $x \in]-\infty;0[$, $g(x) > 0$ **[0,5 pt]**

(3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 2y' + y = 0$ et en déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a $u(x) = (x+1)e^{-x}$ **[0,75 pt]**

(4) A l'aide d'une intégration par parties calculer $I = \int_0^3 (t+1)e^{-t}dt$ **[0,5 pt]**

II- (1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition **[0,5pt]**

(2) Etudier la dérivabilité de f en 0 **[0,5pt]**

(3) Vérifier que pour tout $x \in]-\infty;0[$ $f'(x) = g(x)$ **[0,25 pt]**

(4) Calculer $u'(x)$ pour tout $x \in [0;+\infty[$; déduire le tableau de variation de u **[0,5 pt]**

(5) En déduire, à l'aide de la partie I, le tableau de variations de la fonction f **[0,75 pt]**

(6) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et que $-1.3 < \alpha < -1.2$ **[0,5 pt]**

(7) Etudier les branches infinies de la courbe (C_f) **[0,5 pt]**

(8) Construire la courbe (C_f) **[0,5 pt]**

III- On pose $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 3$. Soit la fonction h définie sur $]-\infty;0]$ par

$$h(x) = \frac{x^2-1}{2}ln(1-x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$$

(1) Justifier que h est une primitive de f sur $]-\infty;0]$. **[0,5 pt]**

(2) Déduire l'intégrale $J = \int_\alpha^0 [1 + xln(1-x)]dx$ **[0,25 pt]**

(3) Calculer en fonction de α ; l'aire $A(\alpha)$. **[0,5 pt]**

(3) Pour $\alpha = -1.25$, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire $A(\alpha)$ exprimée en cm^2 **[0,25 pt]**

https://t.me/KamerHighSchool