LYCÉE BILINGUE DE YAOUNDÉ

DEVOIR SURVEILLÉ DE MATHS
DATE :
DURÉE : 4 heures
CLASSE : Tle C

EXERCICE 1 : (6 pts)

A- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 + \ln(x+3) > \ln\left(x^2 + 2x - 3\right)$ **(2 pts)**

B- 1. Donner le reste de la division euclidienne de 2^n par 7, où n est un entier naturel. **(1 pt)**

2. On pose $a_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$.
Montrer que l'on a : $a_{n+3} \equiv a_n \ (7)$. **(1 pt)**

3. Déterminer les entiers n pour lesquels $a_n \equiv 0 \ (7)$. **(1 pt)**

4. Justifier que les nombres suivants, écrits en base 2, sont divisibles par 7 :
1110, 1010100 et 1001001000. **(1 pt)**

EXERCICE 2 : (5 pts)

ABCD est un trapèze isocèle de bases [AD] et [BC] avec [BC] > [AD].
On pose $AB = BC = 3\ell$ $(\ell > 0)$, $G = \text{bar}\{(A,1),(B,2)\}$ et $G' = \text{bar}\{(C,2),(D,1)\}$.

1. Faire une figure. **(0,5 pt)**

2. Soit E tel que $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{ED} = \vec{0}$.
Montrer que les points G, G′ et E sont alignés et construire ces points. **(1,5 pt)**

3. Déterminer et construire les ensembles suivants : $E_1 = \left\{M \,/\, MA^2 + 2MB^2 - 2MC^2 - MD^2 = 0\right\}$
et $E_2 = \left\{M \,/\, \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\|\right\}$. **(3 pts)**

EXERCICE 3 : (9 pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J) d'unité graphique 2 cm.
On pose : $f(x) = x^2 - 2x + 2xe^{-x}$ et $g(x) = x^2 - 2x$.

1. Étudier les variations de f et calculer les limites aux bornes de son domaine. **(2 pts)**

2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une seule solution non nulle t et que $1{,}5 < t < 1{,}6$.
Montrer que $e^t = \dfrac{2}{2-t}$. **(1,5 pt)**

3. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ puis en déduire la positon relative des courbes représentatives de f et g. **(0,5 pt)**

4. Déterminer $\lim[f(x) - g(x)]$ lorsque x tend vers plus l'infini ; donner une interprétation graphique du résultat. **(1 pt)**

5. Construire les courbes représentatives de g et f avec le plus grand soin. **(2 pts)**

6. Soient $a > 0$ et $E = \{M(x,y) : 0 < x < a,\ g(x) < y < f(x)\}$.
- Calculer l'aire $\mathscr{A}(E)$ du domaine E. **(1 pt)**
- Déterminer $\lim \mathscr{A}(E)$ lorsque a tend vers plus l'infini et en donner une interprétation. **(1 pt)**

Examinateur : K. TAKUH A. R.