Ministère des enseignements secondaires **Trimestre 2:** Février 2020.
Lycée bilingue SIN de Foumban **Classe:** Tle D. **Durée:** 4 heures. **Coeff:** 4.
Département de mathématiques **Par: EFOUBA EKASSI R.**

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1: /5,5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A et B d'affixes respectives $Z_A = 2$ et $Z_B = \frac{3}{2} + i$. S_2 est la similitude directe d'écriture complexe $z' = \frac{1}{2}(1+i)z$ et S_1 est la transformation du plan qui à tout point $M(x; y)$ associe le point $M'(x'; y')$ tels que:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y - 2 \end{cases}$$

1. Déterminer les caractéristiques de S_2. [0,5pt]
2. Déterminer l'écriture complexe et la nature de S_1. [0,75pt]
3. Soient M et N les points du plan tels que $S_1(M) = B$ et $S_2(B) = N$.
   Déterminer les affixes des points M et N. [1pt]
4. Soit P tel que le triangle OPA soit un triangle rectangle isocèle direct en P.
   (a) Montrer que $\frac{Z_P}{Z_P - 2} = i$. [0,5pt]
   (b) En déduire l'affixe de P. [0,5pt]
5. Montrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires. [1pt]
6. Représenter les triangles AMB, BNO et OPA dans le repère. [1,25pt]

Exercice 2: /3,5 points

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}. \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$. [0,75pt]
2. Montrer que (u_n) est croissante. [0,75pt]
3. On pose (v_n) la suite définie pour tout entier n par $v_n = \frac{1 + u_n}{2 - 2u_n}$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique. [0,5pt]
   (b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. [1pt]
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n). [0,5pt]

t.me/KamerHighSchool

Problème: /11 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(Unités graphiques: 2 cm)

Partie A: /4,5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3+x)e^{-\frac{x}{2}}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. [0,5pt]
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations. [1,25pt]
3. Tracer la courbe de f dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. [1pt]
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$. [0,5pt]
   (b) α étant la solution non nulle de l'équation précédente, montrer que: $-2 < \alpha < -\frac{3}{2}$. [0,5pt]
   (c) Plus généralement, déterminer suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. [0,75pt]

Partie B: /4,5 points

On considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = 3e^{\frac{x}{2}} - 3$.

1. Démontrer que $f(x) = 3$ si et seulement si $\phi(x) = x$. [0,5pt]
2. (a) calculer $\phi'(x)$ et $\phi''(x)$ et montrer que $\phi'(\alpha) = \frac{\alpha+3}{2}$. [1pt]
   (b) Étudier le sens de variation de ϕ', puis celui de ϕ. [1,5pt]
3. On pose $I = [-2; \alpha]$.
   (a) Montrer que $\forall x \in I$, $\phi(x) \in I$. [0,5pt]
   (b) Montrer que pour tout réel $x \in I$, $\frac{1}{2} \leq \phi(x) \leq \frac{3}{4}$. [0,5pt]
   (c) En déduire que $\forall x \in I$, $0 \leq \frac{1}{2}(\alpha - x) \leq \phi(\alpha) - \phi(x) \leq \frac{3}{4}(\alpha - x)$. [0,5pt]

Partie C: /2 points

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \phi(u_n) \end{cases}$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

1. Montrer que $0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(\alpha - u_n)$. [0,5pt]
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$. [0,75pt]
3. En déduire la limite de la suite (u_n). [0,25pt]
4. Déterminer le réel p tel que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$. [0,5pt]

t.me/KamerHighSchool