Minesec — **Année scolaire** : 2018 - 2019
Lycée bilingue de Messok — **Classe** : T^{le} C
Département de Mathématiques — **Durée** : 4 heures **Coef :** 5

Examinateur : *Nzouekeu Mbitkeu Patrice*

L'épreuve comporte quatre exercices sur deux pages. La clarté de la copie sera appréciée dans la correction de la feuille du candidat.



Exercice 1. ***(5,25 points)***

1. *L'espace est muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. *On donne les points* $A(-1,2,1)$, $B(1,-6,-1)$, $C(2,2,2)$, $I(0,1,-1)$.
   (a) i. *Calculer* $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   Peut-on dire des points A , B , C et I qu'ils sont coplanaires ? *[0,75 point]*
   ii. *Déterminer une équation cartésienne du plan* (P) *contenant les points A , B et C.* *[0,25 point]*
   (b) i. *Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de I sur le plan* (P). *[0,75 point]*
   ii. (S) *est la sphère de centre I et de rayon* 3. *Déterminer l'intersection du plan* (P) *et de la sphère* (S). *[1,25 points]*
2. *On se place dans le plan complexe rapporté au repère* $(O, \vec{u}, \vec{v})$. *Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe* $f(z)$ *défini par :* $f(z) = z + \frac{1}{z}$. *On note M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe* $z' = f(z)$.
   (a) *On appelle A le point d'affixe* $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   i. *Déterminer la forme exponentielle de a.* *[0,25 point]*
   ii. *Déterminer la forme algébrique de* $f(a)$. *[0,25 point]*
   (b) *Résoudre dans l'ensenble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes l'équation* $f(z) = 1$. *[0,5 point]*
   (c) *Soit M un point d'affixe z du cercle* $\mathcal{C}_1$ *de centre O et de rayon* 1.
   i. *Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme* $z = e^{i\theta}$ *avec* θ *un nombre réel.* *[0,25 point]*
   ii. *Montrer que* $f(z)$ *est un nombre réel.* *[0,5 point]*
   (d) *Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que* $f(z)$ *est un nombre réel.* *[0,5 point]*

Exercice 2. ***(4 points)***

On considère un cercle $(\mathcal{C})$ *de diamètre* $[AB]$. *On appelle C un point du segment* $[AB]$ *distinct des points A et B et I le milieu de* $[BC]$. *La médiatrice de* $[BC]$ *coupe* $(\mathcal{C})$ *en M et M′ tel que AMM′ est rectangle de sens direct. Notons par N le projeté orthogonal du point C sur* (AM).

1. (a) *Faire la figure et donner la nature du quadrilatère* $CMBM'$. *[0,5 point]*
   (b) *En déduire que la droite* $(CM') \perp (AM)$ *et que les points N , C et M′ sont alignés.* *[1 point]*
2. *Désignons par s la similitude directe de centre N qui transforme M en C.*
   (a) *Déterminer l'angle de la similitude s.* *[0,5 point]*
   (b) *Déterminer les images par s des droites MI et NC.* *[1 point]*
   (c) *En déduire l'image par s du point M′.* *[0,5 point]*

t.me/KamerHighSchool

Preliminary version – 22 novembre 2019 – 18:08

3. *On désigne par I' le milieu du segment $[AC]$.*
   (a) *Démontrer que I' est l'image de I par s.* *[0,5 point]*
   (b) *En déduire que la droite (NI) est tangente en N au cercle $(\mathcal{C}')$ de diamètre $[AC]$.* *[0,5 point]*

Exercice 3. ***(2,5 points)***

Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$

1. *Calculer I_0 puis I_1* *[0,75 point]*
2. *Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n puis en déduire I_n en fonction de I_{n-4}.* *[1 point]*
3. *Déduire la valeur de I_4* *[0,25 point]*
4. *Calculer $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$* *[0,5 point]*

Exercice 4. ***(8,25 points)***



Les parties A , B , et C sont indépendantes.

Partie A : *(3,25 points)*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$

1. *Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.* *[0,5 point]*
2. *Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.* *[0,75 point]*
3. *En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0;+\infty[$.* *[0,25 point]*
4. *Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $F(x) = xln(x) - ln(x)$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.* *[0,25 point]*
5. *Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $]1;+\infty[$.* *[0,5 point]*
6. *Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]1;+\infty[$ qu'on note α.* *[0,5 point]*
7. *Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.* *[0,5 point]*

Partie B : *(3 points)*

Le plan est muni du repère orthonormé (O, I, J). Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = 1 + ln(x)$.

1. (a) *Soit A le point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_h)$ et de l'axe des abscisses et P le point d'intersection des courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$. Déterminer les coordonnées du point A et justifier que les coordonnées du point P sont $(1;-1)$.* *[0,5 point]*
   (b) *Construire sur l'intervalle $]0;+\infty[$ les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ dans le même repère.* *[1 point]*
2. *On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C}_g)$, $(\mathcal{C}_h)$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$.*
   (a) *Exprimer l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie A.* *[0,5 point]*
   (b) *Montrer que $\mathcal{A} = 1 - \frac{1}{e}$* *[0,5 point]*
3. *Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1;+\infty[$. On note $\mathcal{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$. On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_t$. Montrer que $\mathcal{B}_t = tln(t) - ln(t)$, puis conclure.* *[0,5 point]*

Partie C : *(2 points)*

1. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E) : y'' - 4y = 0$.* *[0,5 point]*
2. *Déterminer les réels a , b et c tels que le polynôme g définit par : $g(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de l'équation $(E') : y'' - 4y = 4(x-1)^2 - 2$.* *[0,5 point]*
3. (a) *Démontrer que f est solution de (E') si et seulement si la fonction $f - g$ est solution de (E).* *[0,5 point]*
   (b) *En déduire sur $\mathbb{R}$ la solution générale de (E') , puis celle qui vérifie : $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.* *[0,5 point]*

LATEX

t.me/KamerHighSchool

Preliminary version – 22 novembre 2019 – 18:08