LYCEE BILINGUE DE MBANKOMO *EVALUATION N°3 2019/2020*

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES *EPREUVE DE MATHEMATIQUES*

CLASSE : TLE C *DUREE 4H* *COEFF 5*



Exercice1 (2.5pts) Répondre par vrai ou faux sans justifier. Bonne réponse +0.25pt ; Mauvaise réponse -0.25pt et Pas de réponse 0pt

1. La fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\sqrt{1-x^2}$ a pour ensemble de définition $]-1;1[$
2. Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{sinx}$ est la fonction $x \longmapsto ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|$
3. La fonction u définie par $u(x) = \frac{x}{2^x}$ a pour fonction dérivée lorsquelle est dérivable u' définie par $u'^{(x)} = \frac{(1-xln2)}{2^x}$
4. La dérivée de la fonction F définie par $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{t}{ln(t+1)}dt$ est $F'(x) = \frac{x^3}{ln(x^2+1)}$
5. La fonction G définie par $G(x) = \int_x^{3x} \frac{e^t}{t-1}dt$ est dérivable sur $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$
6. L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1;+\infty[$ où $h(x) = 2x^2 - 2x - 2lnx$
7. Pour tous réels a et b, on a : $\ln ab = \ln a + \ln b$
8. Si p est une projection vectorielle d'un espace vectoriel E alors on a : $pop = IdE$
9. Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E alors $dimkerf + dimimf = dimE$
10. L'ensemble $F = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 5\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$

Exercice2 (3,5pts)

On considere les équations différentielles (E): $y'' + y' = \frac{(2x-3)(x+2)}{x^2}$ et (E'): $y'' + y' = 0$ et la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2lnx - \frac{3}{x} + 3$

1. Montrer que $f$est solution sur $]0;+\infty[$ de (E) 0.5pt
2. Résoudre l'équation (E') sur $]0;+\infty[$ 0.5pt
3. Montrer qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - f$ est solution de (E') 1pt
4. Résoudre alors (E) sur $]0;+\infty[$ et déterminer la solution Φ de (E) qui vérifie $\Phi(1) = 0$ et $\Phi'(1) = 4$

Exercice 3 (3pts)

E est un espace vectoriel de base $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. $\vec{a}$ et $\vec{n}$ désignent deux vecteurs tels que $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. φ est l'application de E dans lui-même qui à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ associe son image $\varphi(\vec{u}) = (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{n}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E. 0.5pt
2. a. Déterminer la matrice de φ dans la base B. 0.5pt
   b. Donner une expression analytique de φ 0.5pt
3. Montrer que ker φ, le noyau de φ est une droite vectorielle dont on précisera une base 0.5pt
4. En déduire la dimension de Imφ, image de φ. φ est-il bijectif ? 0.5pt
5. Montrer que φ est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques. 0.5pt

t.me/KamerHighSchool

PROBLEME Ce problème comporte 3 parties A, B et C indépendantes et obligatoires **(11pts)**

PARTIE A **(2pts)**

1. Donner une primitive de la fonction $x \to \sin^3 x cosx - \frac{1}{4}\sin 2x$ **0.5pt**

2. Soit k la fonction définie sur]2, +∞[par $k(x) = \frac{x^3-3x^2+7}{(x-2)^2}$

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \neq 2$, $k(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$ **0.75pt**

b. Déduire la primitive de k qui s'annule en 3. **0.75pt**

PARTIE B **(06.5pts)**

I. Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2 + 1)$

1. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ **1pt**

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est nulle et l'autre est notée α avec $1 < \alpha < 2$. **1pt**

3. Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ **0.5pt**

II. Soit f la fonction définie sur [0, +∞[par $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ On note (C_f) sa courbe dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. Montrer que f est dérivable en 0. **0.5pt**

2. a. Donner une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0. **0.5pt**

b. Montrer que pour tout $t > 0$, $\ln(1 + t) \leq t$ et déduire la position relative entre (C_f) et la tangente (T). **0.75pt**

3. a. Montrer que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ **0.5pt**

b. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)^2}$ puis déduire le sens de variation de f **0.75pt**

c. Dresser le tableau de variation de f. **0.25pt**

4. Tracer la courbe (C_f). **0.75pt**

PARTIE C **(02.5pts)**

1. Soit $l(x) = cosx$ et I = $[\frac{1}{2}, 1]$. Montrer que l'équation $l(x) = x$ admet une unique solution β dans I. **0.5pt**

2. Montrer que pour tout $x \in$I, $l(x) \in$I. et que $|l'(x)| \leq 0.9$. **0.5pt**

3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_n = \cos u_n$

a. Montrer que pour tout n, $u_n \in$I et que $|u_n - \beta| \leq 0.9|u_0 - \beta|$ **0.75pt**

b. En déduire que $|u_n - \beta| \leq (0,9)^n|u_0 - \beta|$ et la limite de (u_n). **0.75pt**

t.me/KamerHighSchool