Lycée Bilingue de Mbanga **Département de Mathématiques**

Evaluation de fin de la deuxième séquence 2009/2010
Classe : $T^{le}D$ Durée : 3h30 Coef : 4
Examinateur : M. KENMOGNE
NB : La qualité de la rédaction sera prise en compte

Exercice 1 (4pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme $p(z) = z^3 - (6+5i)z^2 + (3+20i)z + 10 - 15i$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$. 0.75pt
2. Calculer $p(3+2i)$ et conclure. 0.5pt
3. a) Déterminer le polynôme $Q(z)$ de dégré 2 tel que $p(z) = (z-3-2i)Q(z)$. 0.5pt
   b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $p(z) = 0$. 0.25pt
4. Le plan est muni du repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$: On donne les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $2+i$ et $3+2i$.
   a) Déterminer l'écriture exponentielle du complexe $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$. 0.5pt
   b) Déduire la nature exacte du triangle ABC. 0.25pt
5. Soit s la similitude de centre A qui transforme C en B.
   a) Déterminer l'angle θ et le raport k de s. 0.75pt
   b) Déterminer l'écritue complexe de s. 0.5pt

Exercice 2 (4.5pts)

1. Linéariser $\sin^4 x$ à l'aide de la formule d'Euler. 0.75pt
2. On donne le complexe $u = (\sqrt{3} - i)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\sqrt{3} - i$. 0.5pt
   b) Donner les valeurs exactes des nombres complexes $(\sqrt{3} - i)^3$ et $(\sqrt{3} - i)^6$. 0.5pt
   c) Déterminer pour quelles valaurs de n :
      i) u est un nombre réel. 0.5pt
      ii) u est un nombre imaginaire pure. 0.5pt
3. Soit z un nombre complexe différent de -2i : On pose $Z = \frac{z-2+i}{z+2i}$ et $z = x + iy$.
   a) Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y. 0.75pt
   b) Déduire et construire :
      i) L'ensemble E des points M du plan d'affixe z tels que Z soit un réel. 0.5pt
      ii) L'ensemble F des points M du plan d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pure. 0.75pt

Problème (11.5pts)

Partie A (8.25pts)

On considére les fonctions f et g définies par $f(x) = \frac{1+x}{x^3-1}$ et $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

I. Etude de la fonction g.

1. Etudier les variations de g. 1pt
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β tel que $-1.68 < \beta < -1.67$. 0.75pt
3. En déduire suivant les valeurs de x le signe de $g(x)$. 0.5pt

t.me/KamerHighSchool

II. Etude de la fonction f.

1. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition : (On précisera eventuellement les asymptotes). 1.5pt
2. a) Déterminer la fonction dérivée f' de f et l'exprimer en fonction de g. 0.75pt
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. 0.75pt
3. On considère la restriction h de f sur $]1;\ +\infty[$.
   a) Montrer que h est bijective de $]1;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera. 0.75pt
   b) Calculer $h(2)$ et donner la valeur de $(h^{-1})'(\frac{3}{7})$. 0.75pt
4. Représenter dans le même repère la fonction f et la fonction réciproque h^{-1} de h. 1.5pt

Partie B (3.25pts)

I. On considére la fonction k définie par $k(x) = -3x(x^2+1)^3 + \sin 3x$.

1. Justifier que k admet des primitives sur $\mathbb{R}$. 0.25pt
2. Déterminer l'ensemble des primitives K de k sur $\mathbb{R}$. 0.75pt
3. En déduire la primitive de k dont la courbe passe par le point $A(\frac{\pi}{6},\ 1)$. 0.5pt

II. 1. Vérifier que $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$. 0.25pt
2. Etudier la dérivabilité en -1 de la fonction u définie par $u(x) = |x^3+1|$. 1pt
3. Démontrer que pour tout réel a on a $|\cos a - \frac{1}{2}| = |a - \frac{\pi}{3}|$. (On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis) 0.5pt

BONNE CHANCE A TOUS ! ! !

t.me/KamerHighSchool